

10.2. FONKSİYONLAR



Hazırlık Çalışması

1. $(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), \dots$ yandaki sıralı ikililerin birinci ve ikinci bileşenleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.
2. Bir aracın ortalama hızı 60 km/sa. tir. Buna göre bu aracın hareketinden herhangi bir saat sonra toplam kaç kilometre yol aldığını veren yol-zaman formülü oluşturunuz.
3. Bilgi: Birbirini çeviren iki çarkın dönme sayısı dış sayısı ile ters orantılıdır. Birbirini çeviren iki çarktan büyük çarkın dış sayısı küçük çarkın dış sayısının 4 katıdır. Buna göre büyük çarkın dönme sayısı x olmak üzere küçük çarkın dönme sayısını veren formülü bulunuz.



Hayat dikkatle gözlemlendiğinde konu ile ilgili bilgi doğrultusunda yaşanan her algının beyinlerde bir çıktısı olduğu görülür.

Sınıf ortamında $3 \cdot 5$ işlemi duyulduğunda öğrencilerin beyinde birtakım simgeler belirir. Geçmişte öğrenilen bilgiler doğrultusunda akıllarında 15 sayısı veya farklı bir sonuç oluşur.



Cep telefonunun tuş kilidi açıldığında ekrandaki menüde yapılmak istenen işlemlerden biri seçilir. Seçilen tuşa dokunulduğunda ilgili bölüm gelir. Tuşa dokunulduğunda ilgili bölümün gelmesi bu telefonun bir fonksiyonudur, denir.

Göz kontrolü için doktora gidildiğinde göz doktoru, farklı büyüklükte harflerin olduğu bir tablo göstererek bunlardan bazılarının okunmasını ister. Bu harfler okunurken göze gelen ışık beyne görüntü olarak iletilir. Işığın görüntüye dönüştürülmesi gözün bir fonksiyonudur.



Bir çiftçi tarafından tarlaya buğday ekilir. Uygun iklim şartlarında, düzenli bir bakımla hasat mevsimi geldiğinde tarladan aynı cins buğday elde edilir. Burada tarla bir dönüştürücüdür. Üretilen buğday fabrikaya götürülür. Fabrika ileri teknoloji ile donatılmışsa sistem, bilgisayara bağlıdır. Burada gerekli işlemlerden geçirildikten sonra buğdaydan ekmeklik un veya sofralık bulgur elde edilmek isteniyorsa sistemde istenilen dönüşümü (fonksiyonu) gerçekleştirmek için ilgili tuşa basılır. Buğdayın ilgili birimin paketleme bölümünden istendiği şekilde çıkması fabrikanın dönüştürme (fonksiyon) birimlerinin doğru çalıştığını gösterir.



Yukarıda sayılan ve çevrede görülen birçok şey bir fonksiyondur. Matematikte **fonksiyon** tıpkı günlük hayatta gözlemlenen olay ve sonuçlar gibi bilimsel bir kurala göre girdi ve çıktılardan oluşan bir dönüştürücüdür.

10.2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

Terimler ve Kavramlar

- Fonksiyon
- Tanım Kümesi
- Değer Kümesi
- Görüntü Kümesi
- Fonksiyonun Grafiği
- Sabit Fonksiyon
- İçine Fonksiyon
- Örten Fonksiyon
- Bire Bir Fonksiyon

- Eşit Fonksiyon
- Birim Fonksiyon
- Doğrusal Fonksiyon
- Tek Fonksiyon
- Çift Fonksiyon
- Dikey (Düşey) Doğru Testi

Sembol ve Gösterimler

- $f : A \rightarrow B, f(A), y = f(x), f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, I$

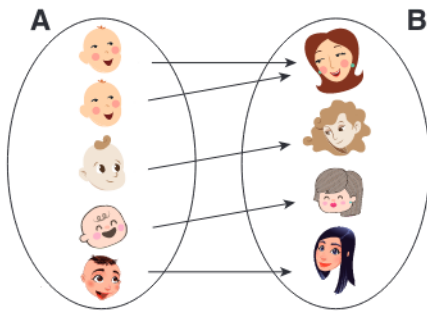
Neler Öğreneceksiniz?

- Fonksiyonlarla ilgili problemler çözebilme,
- Fonksiyonların grafiklerini çizebilme,
- Fonksiyonların grafiklerini yorumlayabilme,
- Gerçek hayat durumlarından doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilenlerin grafik gösterimlerini yapabilmeyi öğreneceksiniz.

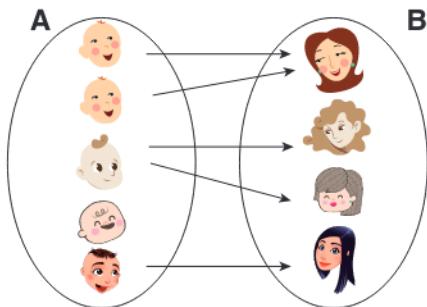
10.2.1.1. Fonksiyonlarla İlgili Problemler

Doğum için bir hastanenin ameliyathanesine aynı anda alınan 4 anne adayının tamamı sağlıklı birer doğum gerçekleştirmiştir. Anne adaylarından birinin ikiz bebeği, diğer üçünün ise birer bebeği dünyaya gelmiştir. Hemşire, bebekleri yeni doğan servisine götürerek kontrollerini yaptırdıktan sonra kıyafetlerini giydirip annelerine teslim etmektedir. Her bebeğin annesine teslim edilmesi ve serviste teslim edilmeyen bebeğin kalmaması gerekmektedir.

Bebeklerin oluşturduğu küme A, annelerin oluşturduğu küme B kümesi olmak üzere bebeklerin annelerine teslim edilmesi ile ilgili aşağıda verilen eşleştirmeleri inceleyiniz.



Yandaki eşleştirmede bebeklerin her birini hemşirenin kendi annesine teslim ettiği görülmektedir. Annesine teslim edilmeyen bebeğin kalmaması ve her bebeğin annesine teslim edilmesi sebebiyle yapılan bu eşleştirme doğru bir eşleştirme örneğidir (Bir annenin ikiz bebeği olduğundan ikiz bebeklerin her ikisinin de kendi annelerine götürüldüğüne dikkat ediniz.). Yandaki şekilde yapılan eşleştirme, bu bölümde öğrenilecek fonksiyon konusu için bir örnek model oluşturmaktadır.



Yandaki eşleştirmede hemşirenin bebeklerden birini farklı iki anneye teslim etmesinin mümkün olmaması ve bebeklerden birini annesine teslim etmemesi doğru bir eşleştirme örneği değildir.

Yandaki şekilde yapılan eşleştirme bu bölümde öğrenilecek fonksiyon konusu için bir örnek model oluşturmamaktadır.

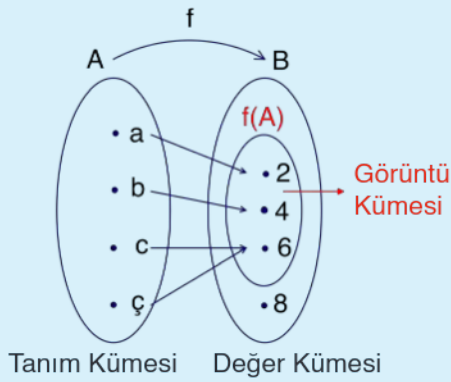


Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f , h , g gibi sembollerle gösterilir.

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir. A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** denir. A dan A ya tanımlı bir fonksiyona kısaca **A da tanımlı fonksiyon** da denilebilir. f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını B kümesindeki bir y elemanı ile eşliyor ise **x elemanının f altındaki görüntüsü y elemanıdır** denir. Bu durum $y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

$f : A \rightarrow B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **bu fonksiyonun görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemi ile $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ olarak ifade edilir.



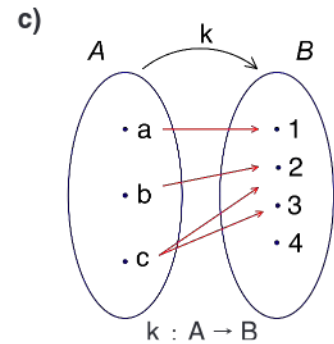
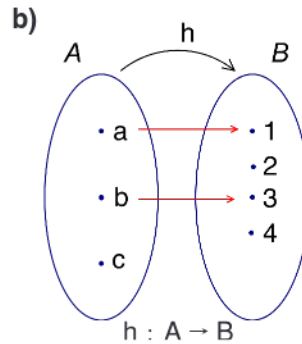
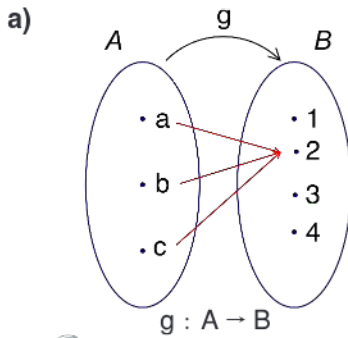
Örneğin yanda verilen şekilde,

- Tanım kümesinde boşta kalan herhangi bir eleman olmadığından ve tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yalnız bir elemanla eşlendiğinden f bir fonksiyondur.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c, \text{ç}\}$, değer kümesi $B = \{2, 4, 6, 8\}$, görüntü kümesi $f(A) = \{2, 4, 6\}$ ve $f(A) \subseteq B$ olur.
- a elemanının f altındaki görüntüsü 2 olup $f(a) = 2$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $f(b) = 4$, $f(c) = 6$ ve $f(\text{ç}) = 6$ olur.
- f fonksiyonu sıralı ikililer kullanılarak $f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 6), (\text{ç}, 6)\}$ biçiminde de gösterilebilir.



Örnek 1

Aşağıdaki Venn şemaları ile verilen ifadelerden hangilerinin fonksiyon olduğunu bulunuz.



Çözüm

- a) g , tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemanla eşleştirdiği için fonksiyondur.
- b) h , tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde herhangi bir elemanla eşleştirmede olduğu için **fonksiyon değildir**.
- c) k , tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde iki elemanla eşleştirdiği için **fonksiyon değildir**.

**Örnek 2**

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin A kümesinden B kümesine bir fonksiyon belirttiğini bulunuz.

a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ b) $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ c) $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$

**Çözüm**

- a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki tüm elemanlar birer defa eşlendiği için f bir fonksiyondur.
- b) $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki 3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediği için g bir **fonksiyon değildir**.
- c) $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$ ifadesinde B kümesindeki elemanlar A kümesindeki elemanlar ile eşleştiği için h , A dan B ye bir **fonksiyon değildir**.

**Örnek 3**

Esra ve Derya, küçük kardeşleri Uğur'un birden beşe kadar saymayı öğrendiğini gördüklerinde ona yeni sayılar öğretmek amacıyla aşağıdaki kurallara göre bir oyun oynamaya karar veriyorlar.

- Uğur, ablası Esra'nın kulağına bildiği sayılardan birini söyleyecektir.
- Esra, kardeşinin söylediği sayının iki katını ablası Derya'nın kulağına söyleyecektir.
- Derya ise Esra'nın söylediği sayının üç fazlasını yüksek sesle duyuracaktır ve böylelikle Uğur'un söylediği sayının dönüşümü tamamlanacaktır.
- Bu oyun Uğur'un bildiği tüm sayıların dönüşümü tamamlanana kadar sürecektir.

Buna göre bu kardeşlerin oynadığı oyunun kuralını bir fonksiyon şeklinde yazarak bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

**Çözüm**

Uğur'un ablası Esra'ya söylediği sayı x olmak üzere Esra'nın Derya'ya söylediği sayı $2x$ ve Derya'nın duyurduğu sayı $2x + 3$ olur. Böylelikle x sayısına karşılık $2x + 3$ sayısı oluşur. Bu oyunun kuralı $f(x) = y$ olacak şekilde $f(x) = 2x + 3$ eşleştirme kuralı ile ifade edilebilir ve $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$ olur. Bu fonksiyondaki sıralı ikililerin birinci bileşenleri Uğur'un bildiği sayılar kümesi olan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olup bu küme fonksiyonun tanım kümesidir. Bu fonksiyondaki sıralı ikililerin ikinci bileşenleri ise Uğur'un bildiği sayılara karşılık oyunun sonunda oluşan yeni sayılardır ve bu sayılar görüntü kümesini oluşturur. Buna göre bu fonksiyonun görüntü kümesi $\{5, 7, 9, 11, 13\}$ olur.

**Örnek 4**

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen ifadelerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{5 - x} + 3x - 1$

**Çözüm**

- a) f fonksiyonunun tanım kümesinden alınan her x gerçekte sayı için $x^2 + 2 \geq 0$ ve $\sqrt{x^2 + 2}$ ifadesi bir gerçekte sayıdır. Dolayısıyla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ ifadesi bir fonksiyon belirtir.
- b) g fonksiyonunun tanım kümesindeki bazı değerler için $\sqrt{5 - x}$ ifadesinin bir gerçekte sayı olmadığı görülür. Örneğin $x = 6$ için $\sqrt{5 - 6} = \sqrt{-1}$ sayısı bir gerçekte sayı değildir. Buna göre $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{5 - x} + 3x - 1$ ifadesi bir **fonksiyon değildir**.

**Örnek 5**

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen ifadelerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$
 b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x+1}{x+3}$
 c) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

**Çözüm**

- a) Tanım kümesindeki $-3 \in \mathbb{R}$ için $f(-3) = \frac{2 \cdot (-3) + 1}{-3 + 3} = \frac{-5}{0} \notin \mathbb{R}$ olduğundan -3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediğinden f **fonksiyon değildir**.
- b) Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde herhangi bir elemanla eşleşeceğinden ve hiçbir eleman açıkta kalmayacağından g bir fonksiyondur.
- c) Tanım kümesindeki $3 \in \mathbb{N}$ için $h(3) = \frac{2 \cdot (3) + 1}{3 + 3} = \frac{7}{6} \notin \mathbb{N}$ olduğundan 3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediğinden h **fonksiyon değildir**.

**Örnek 6**

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

**Çözüm**

A kümesinin her elemanının f fonksiyonundaki görüntüsü $f(A)$ yı vereceğinden A kümesinin her elemanı f fonksiyonunda x yerine yazılırsa

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3,$$

$$f(0) = 2 \cdot (0) - 1 = -1,$$

$$f(1) = 2 \cdot (1) - 1 = 1,$$

$$f(2) = 2 \cdot (2) - 1 = 3 \text{ bulunur. Buradan görüntü kümesi, } f(A) = \{-3, -1, 1, 3\} \text{ olur.}$$

**Örnek 7**

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 6$ fonksiyonunda $f(A) = \{-10, 18, 22\}$ olduğuna göre f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

**Çözüm**

$f(A)$ görüntü kümesi tanım kümesindeki her elemanın f fonksiyonu altındaki görüntüsü olduğundan görüntü kümesindeki her bir elemanın f fonksiyonuna eşitlenmesiyle bulunan x değerleri tanım kümesinin birer elemanı olacaktır.

$$4x + 6 = -10 \Rightarrow 4x = -16 \Rightarrow x = -4,$$

$$4x + 6 = 18 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3,$$

$$4x + 6 = 22 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ olur. Buradan tanım kümesi, } A = \{-4, 3, 4\} \text{ bulunur.}$$

**Örnek 8**

$f : (-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 7$ olduğuna göre f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

**Çözüm**

$x \in (-2, 1)$ olduğundan $-2 < x < 1$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesi 2 ile çarpılırsa $-4 < 2x < 2$ olur. Her bölgeye -7 eklenirse $-11 < 2x - 7 < -5$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-11, -5)$ olarak bulunur.

**Örnek 9**

$f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x - 3$ ve $f(A) = (-1, 3]$ olduğuna göre A kümesini bulunuz.

**Çözüm**

$f(x) \in (-1, 3]$ olduğundan $-1 < 2x - 3 \leq 3$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesine 3 eklenip her bölgesi $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa $1 < x \leq 3$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi $A = (1, 3]$ olarak bulunur.

**Örnek 10**

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x^2 + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $h(5)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$h(5)$, 5 in h fonksiyonundaki görüntüsü olduğundan h fonksiyonunda x yerine 5 yazılırsa $h(5) = 3 \cdot 5^2 + 5 = 3 \cdot 25 + 5 = 80$ olur.

**Örnek 11**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+3) = 2x - 4$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(4)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

4 ün f fonksiyonu altındaki görüntüsü sorulduğundan $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$ olur. Bu değer f fonksiyonunda x yerine yazılırsa $f(1+3) = 2 \cdot 1 - 4$ ise $f(4) = -2$ olur.

**Örnek 12**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ fonksiyonu için $f(x+1)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

**Çözüm**

$x+1$ in f fonksiyonundaki görüntüsü için f fonksiyonunda x yerine $x+1$ yazılırsa $f(x+1) = 3 \cdot (x+1) + 2 = 3x + 3 + 2 \Rightarrow f(x+1) = 3x + 5$ olur.

**Örnek 13**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x-4) = 7x + 5$ fonksiyonu için

- a) $f(x)$ fonksiyonunun eşleştirme kuralını bulunuz.
 b) $f(x+2)$ fonksiyonunun eşleştirme kuralını bulunuz.

**Çözüm**

$f(x-4) = f(A)$ olsun. Bu ifadede $x-4 = A \Rightarrow x = A+4$ olur.

Bu değer $f(x-4)$ fonksiyonunda her x yerine yazılırsa

$$f((A+4)-4) = 7 \cdot (A+4) + 5$$

$$f(A) = 7A + 28 + 5 \Rightarrow f(A) = 7A + 33 \text{ olur.}$$

- a) Yukarıda bulunan $f(A)$ fonksiyonunda A yerine x yazılırsa $f(x) = 7x + 33$ olur.
 b) Yukarıda bulunan $f(A)$ fonksiyonunda A yerine $x+2$ yazılırsa
 $f(x+2) = 7(x+2) + 33 \Rightarrow f(x+2) = 7x + 47$ bulunur.

**Örnek 14**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ ise $f(x+2)$ fonksiyonunun $f(x)$ fonksiyonu cinsinden yazılışını bulunuz.

**Çözüm**

$f(x+2) = 2 \cdot (x+2) + 3 = 2x + 7$ ve $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow 2x = f(x) - 3$ olur. $f(x+2)$ fonksiyonunda $2x$ yerine $f(x) - 3$ değeri yazılırsa $f(x+2) = 2x + 7 \Rightarrow f(x+2) = f(x) - 3 + 7 \Rightarrow f(x+2) = f(x) + 4$ bulunur.

**Örnek 15**

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlı kaç farklı fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.

**Çözüm**

Fonksiyon; A kümesinden B kümesine tanımlandığından A tanım kümesini, B ise değer kümesini oluşturur. Bu durumda

- $a \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
 $b \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
 $c \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde eşlenebileceği görülür.

Buradan saymanın temel ilkesi gereği $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ tane A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon yazılabilir.

**İpucu**

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı n^m dir.

**Örnek 16**

$A = \{2, 4, 8, 10\}$ ve $B = \{x, y, z\}$ kümeleri için $f : A \rightarrow B$ olmak üzere $f(2) = f(8) = z$ koşuluna uygun kaç tane f fonksiyonu yazılabileceğini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

Tanım kümesindeki 2 ve 8 elemanlarının görüntüleri z dir. Tanım kümesinde geriye kalan 2 eleman değer kümesindeki 3 eleman ile $3^2 = 9$ farklı fonksiyon oluşturabilir. Buradan cevap 9 bulunur.

2. yol

2 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 1 tanedir (z).

4 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 3 tanedir (x, y, z).

8 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 1 tanedir (z).

10 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 3 tanedir (x, y, z).

Buradan çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak A dan B ye yazılabilecek fonksiyon sayısı, $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$ olur.

**Örnek 17**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{x-2} + 1$ ise $f(x+2)$ fonksiyonunun $f(x)$ fonksiyonu cinsinden eşitini bulunuz.

**Çözüm**

$f(x+2) = 5^{x+2-2} + 1 = 5^x + 1$ olur. Bu eşitlikte 5^x teriminin $f(x)$ cinsinden değeri,

$$f(x) = 5^{x-2} + 1$$

$$f(x) - 1 = 5^x \cdot 5^{-2}$$

$$f(x) - 1 = \frac{5^x}{25}$$

$$5^x = 25f(x) - 25 \text{ olur.}$$

Bu değer $f(x+2)$ fonksiyonunda 5^x yerine yazılırsa

$$f(x+2) = 5^x + 1 = 25 \cdot f(x) - 25 + 1 = 25 \cdot f(x) - 24 \text{ olur.}$$

**Örnek 18**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x+1) = f(x) + x$ eşitliğinde $f(1) = 3$ ise $f(4)$ değerini hesaplayınız.

**Çözüm**

$$f(x+1) = f(x) + x \Rightarrow f(x+1) - f(x) = x \text{ olur.}$$

Elde edilen bu eşitlikte x yerine 1, 2 ve 3 değerleri ayrı ayrı yazılırsa

$$x = 1 \text{ için } f(2) - f(1) = 1 \Rightarrow f(2) = 1 + 3 = 4,$$

$$x = 2 \text{ için } f(3) - f(2) = 2 \Rightarrow f(3) = 2 + 4 = 6,$$

$$x = 3 \text{ için } f(4) - f(3) = 3 \Rightarrow f(4) = 3 + 6 = 9 \text{ olur.}$$

**Örnek 19**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x+1) - x \cdot f(x) = 0$ eşitliğinde $f(2) = 1$ ise $f(20)$ değerini hesaplayınız.

**Çözüm**

$f(x+1) = x \cdot f(x) \Rightarrow \frac{f(x+1)}{f(x)} = x$ olur. Elde edilen bu eşitlikte x yerine 2, 3, ..., 19 değerleri yazılırsa

$$x = 2 \text{ için } \frac{f(3)}{f(2)} = 2$$

$$x = 3 \text{ için } \frac{f(4)}{f(3)} = 3$$

$$x = 4 \text{ için } \frac{f(5)}{f(4)} = 4$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$x = 19 \text{ için } \frac{f(20)}{f(19)} = 19 \text{ olur.}$$

Yukarıdaki ifadeler taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{\cancel{f(3)}}{f(2)} \cdot \frac{\cancel{f(4)}}{\cancel{f(3)}} \cdot \frac{\cancel{f(5)}}{\cancel{f(4)}} \cdot \dots \cdot \frac{f(20)}{\cancel{f(19)}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 19$$

$$\frac{f(20)}{f(2)} = 19! \Rightarrow \frac{f(20)}{1} = 19! \Rightarrow f(20) = 19! \text{ olur.}$$

**Örnek 20**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x^2 + x) = 6x^2 + 6x - 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(2)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$f(x^2 + x) = 6 \cdot (x^2 + x) - 5$ fonksiyonunda $x^2 + x$ yerine A yazılırsa fonksiyon $f(A) = 6A - 5$ bulunur.

Buradan $A = 2$ için $f(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$ olur.

**Örnek 21**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2x^2 + 3x - 1) = 6x^2 + 9x + 7$ fonksiyonu için $f(3)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$f(2x^2 + 3x - 1) = 6x^2 + 9x + 7 \Rightarrow f(2x^2 + 3x - 1) = 3 \cdot (2x^2 + 3x - 1) + 10 \text{ olur.}$$

Verilen fonksiyonda $2x^2 + 3x - 1$ yerine 3 yazılırsa

$$f(\underbrace{2x^2 + 3x - 1}_3) = 3 \cdot (\underbrace{2x^2 + 3x - 1}_3) + 10 \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 3 + 10 \Rightarrow f(3) = 19 \text{ elde edilir.}$$



Örnek 22

Aşağıda, her gün kitap okuyan Gülbahar'ın 5 günlük bir süre içinde her bir güne ait okuduğu sayfa sayılarını gösteren bir tablo verilmiştir.

Günler	1.	2.	3.	4.	5.
Sayfa sayısı	50	70	60	50	80

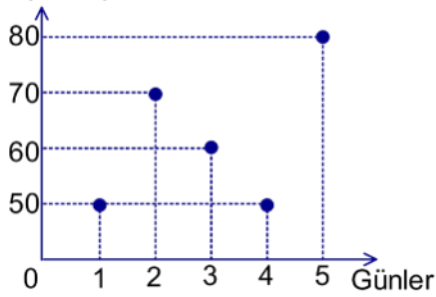
Bu bilgiler yardımıyla Gülbahar'ın günlere göre okuduğu sayfa sayısını veren grafiği oluşturunuz.



Çözüm

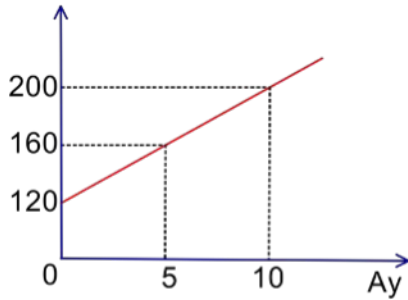
Tabloda Gülbahar'ın 1. gün 50, 2. gün 70, 3. gün 60, 4. gün 50, 5. gün 80 sayfa kitap okuduğu görülüyor. Yatay eksenle günler, dikey eksenle okuduğu sayfa sayıları gösterilerek grafik aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Sayfa sayısı



Örnek 23

Boy (cm)



Yandaki grafikte bir fidanın zamana göre boyundaki değişim gösterilmiştir. Bu fidanın dikildiği andan itibaren 10 aylık süre içinde boyunun aylara göre değişimini gösteren bir tablo yapınız.



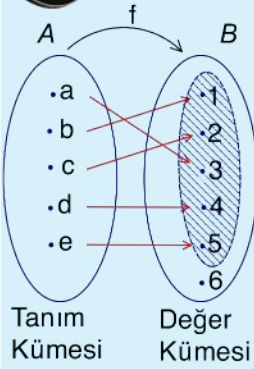
Çözüm

Grafik'e bakıldığında fidanın 120 cm olarak dikildiği görülür. Fidanın dikildiği aydaki boyu 120 cm, 5. aydaki boyunun 160 cm olmasından hareketle fidanın 5 ayda 40 cm uzadığı görülmüştür. Fidan aylara göre doğru orantılı olarak uzadığından her ay $\frac{40}{5} = 8$ cm uzar. Bu veriler aşağıda verilen tablodaki gibi gösterilir.

Aylar	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Fidanın Boyu	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200



Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) \neq B$ olduğuna göre (değer kümesinde en az bir eleman açıkta kalıyorsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir. f içine fonksiyon ise kısaca **f içinedir** denir.

Yanda verilen f fonksiyonu içine fonksiyondur çünkü f nin görüntü kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olup f nin değer kümesi olan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ne eşit değildir.



Örnek 24

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 2, 3, 11\}$ ve $f : A \rightarrow B$ olmak üzere $f(x) = 3x^2 - 1$ fonksiyonunun içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntüleri;

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11,$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$f(0) = 3 \cdot (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \text{ olur.}$$

Buna göre $f(A) = \{-1, 2, 11\}$ olur.

Elde edilen görüntü kümesi değer kümesine eşit olmadığından ($f(A) \neq B$ olduğundan) f fonksiyonu içine fonksiyondur.



Örnek 25

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$

b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = x - 1$



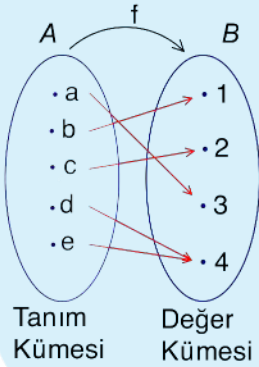
Çözüm

a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesindeki çift tam sayılar eşleşmeyeceğinden f fonksiyonu içine fonksiyondur.

b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = x - 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağından g fonksiyonu **içine fonksiyon değildir**.



Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere

$f : A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) = B$ olduğuna göre (değer kümesindeki her elemana karşılık tanım kümesinde en az bir eleman varsa) f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir. f örten fonksiyon ise kısaca **f örtendir** denir.

Yandaki f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ ve değer kümesi $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olup f fonksiyonunun görüntü kümesi ile değer kümesi aynıdır. Bu yüzden f örten fonksiyondur.



Örnek 26

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 10\}$ ve $f : A \rightarrow B$ olmak üzere $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun örten fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda tanım kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesinin elemanları;

$$f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1,$$

$$f(0) = (0)^3 + 2 = 0 + 2 = 2,$$

$$f(1) = (1)^3 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$f(2) = (2)^3 + 2 = 8 + 2 = 10 \text{ bulunur.}$$

Buna göre $f(A) = \{1, 2, 3, 10\}$ olur. Elde edilen görüntü kümesi, değer kümesine eşit ($f(A) = B$) olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyondur.



Örnek 27

Aşağıda tanımlanan fonksiyonların örten fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 1$ b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 2$ c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$



Çözüm

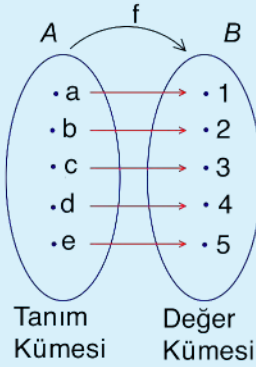
a) Değer kümesinden alınan $\forall (x-1) \in \mathbb{Z}$ için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen $\exists x \in \mathbb{Z}$ bulacağından f fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kalmaz. Dolayısıyla f fonksiyonu örtendir.

b) Değer kümesinden alınan bazı $5x - 2$ gerçel sayıları için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen bir x tam sayısı bulunamaz. Örneğin $5x - 2 = \frac{1}{3}$ için $x = \frac{7}{15} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyon değildir.

c) Değer kümesinden alınan bazı $x^2 + 5$ gerçel sayıları için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen bir x gerçel sayısı bulunamaz. Örneğin $x^2 + 5 = -1 \Rightarrow x^2 = -6$ olup $x \notin \mathbb{R}$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyon değildir.



Bilgi



Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü tanım kümesindeki diğer elemanların görüntülerinden farklı ise bu fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere

$f: A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonu her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ya da $f(x) = f(y)$ için $x = y$ oluyorsa bu fonksiyon bire bir fonksiyondur.

Bir fonksiyon hem bire bir hem de örten ise bu fonksiyona **bire bir örten fonksiyon** denir. Örneğin yandaki şekilde verilen f fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyondur.



Örnek 28

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ için

$2a \neq 2b \Rightarrow 2a + 5 \neq 2b + 5$ olur. Buradan $f(a) \neq f(b)$ olduğundan f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

f fonksiyonu aynı zamanda örten olduğundan f fonksiyonunun bire bir örten fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.



Örnek 29

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

Tanım kümesinden alınan -1 ve 1 için

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ ve $x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ olur.

$-1 \neq 1$ için $f(-1) = f(1)$ olur. Buna göre tanım kümesinden alınan -1 ve 1 elemanlarının görüntüleri aynı olduğundan f bire bir fonksiyon değildir.



Örnek 30

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlı kaç farklı bire bir fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

Fonksiyon; A kümesinden B kümesine tanımlandığından A tanım kümesini, B ise değer kümesini oluşturur. Fonksiyonun bire bir olması için A kümesinin her elemanını B kümesindeki herhangi bir elemanına eşleyen birden fazla elemanın olmaması gerekir. Bu durumda

$a \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan herhangi birine 4 farklı şekilde,

$b \in A$ için B kümesindeki kalan 3 farklı elemandan herhangi birine 3 farklı şekilde,

$c \in A$ için B kümesindeki kalan 2 farklı elemandan herhangi birine 2 farklı şekilde eşlenebileceği görülür.

Buradan saymanın temel ilkesi gereği $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ farklı şekilde A kümesinden B kümesine bire bir fonksiyon tanımlanabilir. $s(A) = 3$, $s(B) = 4$ iken A kümesinden B kümesine tanımlanabilen bire bir fonksiyon

sayısının $P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ olduğuna dikkat ediniz.



Örnek 31

5 gönüllü, bir ilde lösemili çocuklar yararına bir kermes düzenleyecektir. Bu kişilerin isimlerini ve kermesle ilgili yapılacak işleri gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

Gönüllüler	Yapılacak İşler
• Evren • Murat • Semih Can • Katibe • Şule	• Ev eşyası temini • Giysi temini • Gıda temini • Mekan temini • Reklam ve halkla ilişkiler

İş dağılımı aşağıdaki kurallara göre yapılacaktır.

I. Evren, belediyede çalıştığı için mekan temininden sorumlu olacaktır.

II. Semih Can, reklam ve halkla ilişkilerden sorumlu olacaktır.

III. Herkes, yalnız bir görev alacaktır.

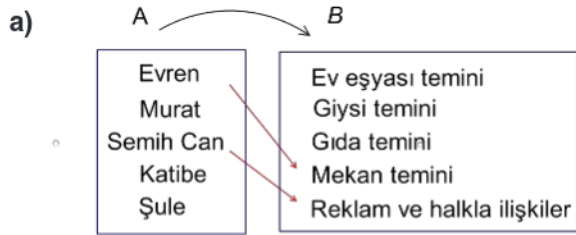
Verilen bu bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Kaç farklı şekilde görev dağılımı yapılabileceğini bulunuz.

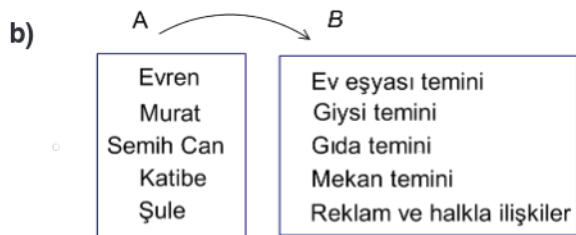
b) Evren ve Semih Can'ın görevlerinin belli olmaması durumunda kaç farklı şekilde görev dağılımı yapılabileceğini bulunuz.



Çözüm



Yandaki şekilde Evren ve Semih Can görevleriyle eşleştirilmiştir. Dolayısıyla Evren 1 farklı, Semih Can 1 farklı şekilde görev alır. Herkesin yalnız bir görevi olacağından geriye kalan 3 kişiden birincisi 3 farklı, ikincisi 2 farklı, üçüncüsü ise 1 farklı şekilde görev alır. Bu durumda saymanın temel ilkesi kullanılarak $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ farklı şekilde görev dağılımı yapılabilir (Gönüllüler ile yapılacak işler arasında yapılan bu eşlemenin bire bir fonksiyon belirttiğine dikkat ediniz.).



Yandaki şekilde eşleştirilen hiçbir görev olmadığından 5 kişiden birincisi 5, ikincisi 4, üçüncüsü 3, dördüncüsü 2, beşincisi ise 1 farklı şekilde görev alabilir. Bu durumda saymanın temel ilkesi kullanılarak $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ farklı şekilde görev dağılımı yapılabilir (Gönüllüler ile yapılacak işler arasında yapılan bu eşlemenin bire bir fonksiyon belirttiğine dikkat ediniz.).



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerin tanımlı olduğu aralıklarda fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.
 - a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$
 - b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$
 - c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-5}{x+1}$
 - ç) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{3x}{2}$
2. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ ve $f(x) = 5x + 4$ olduğuna göre bu fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.
3. Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu "Her x gerçekte sayısını kendisinin karesinin 5 eksiği ile eşleştirmektedir." şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonu için
 - a) 7 nin görüntüsünü bulunuz.
 - b) $f(-3)$ ifadesinin değerini bulunuz.
 - c) Görüntüsü 4 olan sayıları bulunuz.
4. $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $f(A) = \{5, 7, 11, 19\}$ ve $f(x) = 2x - 9$ olduğuna göre bu fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+2) = 3x - 4$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.
 - a) $f(5)$
 - b) $f(1)$
 - c) $f(x+5)$
 - ç) $f(2x+1)$
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x + 7$ ve $f(a+1) = 19$ olduğuna göre a nın hangi sayıya eşit olduğunu bulunuz.
7. Aşağıdaki fonksiyonların bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.
 - a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$
 - b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$
 - c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$
 - ç) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3$
8. Aşağıdaki fonksiyonların örten ya da içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.
 - a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5x + 2$
 - b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 + 4$
 - c) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = 7 - 2x$
 - ç) $g : (-2, 8) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+2}$
9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = 3x$ ve $f(3) = 4$ olduğuna göre $f(1)$ ifadesinin değerini bulunuz.
10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x^2 + x - 1) = 3x^2 + 3x - 8$ olduğuna göre $f(11)$ ifadesinin değerini bulunuz.
11. $A = \{x, %, 1, 2\}$ kümesi veriliyor. A kümesinde tanımlı kaç farklı fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.
12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$ olduğuna göre $f(x-2)$ yi $f(x)$ cinsinden bulunuz.
13. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^{2x-1}$ ise $\frac{f(x+1)}{f(x-1)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Eşit Fonksiyonlar



Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ tanımlanan f ve g fonksiyonları; $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ şeklinde yazılabiliyor ise bu fonksiyonlara **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir. Fonksiyonların eşit olması için tanım ve görüntü kümelerinin eşit olması, tanım kümesindeki her bir eleman için bu elemanların görüntülerinin de aynı olması gerekir.



Örnek 32

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x^3 - 1$ ve $g : A \rightarrow B$, $g(x) = 2x - 1$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadıklarını bulunuz.



Çözüm

$x = -1$ için $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 1 = -2 - 1 = -3$ ve $g(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$,
 $x = 0$ için $f(0) = 2 \cdot (0)^3 - 1 = 0 - 1 = -1$ ve $g(0) = 2 \cdot (0) - 1 = 0 - 1 = -1$,
 $x = 1$ için $f(1) = 2 \cdot (1)^3 - 1 = 2 - 1 = 1$ ve $g(1) = 2 \cdot (1) - 1 = 2 - 1 = 1$ olur. Buradan $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$ ve $f(1) = g(1)$ olur. Dolayısıyla f ve g fonksiyonları eşit fonksiyonlardır.



Örnek 33

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-4)x^3 + (2b-3)x^2 - 5x + 7$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - (c+1)x + d - 1$ fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonları eşit fonksiyonlar ise $a \cdot b + c \cdot d$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$f(x) = g(x)$ olduğundan x değişkenlerinden üsleri aynı olanların katsayıları birbirine eşit olmalıdır.
 $a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6$
 $2b - 3 = 3 \Rightarrow b = 3$
 $-(c + 1) = -5 \Rightarrow c = 4$
 $d - 1 = 7 \Rightarrow d = 8$ bulunur. Buradan $a \cdot b + c \cdot d = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 18 + 32 = 50$ olur.



Örnek 34

$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ ile $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$ fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri eşit olmadığından $f \neq g$ olur.
 Buradan $g(1) = 1 + 2 = 3$ olarak bulunabilirken $f(1)$ değeri bulunamaz.

**Örnek 35**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x - 1) \cdot (x + 2) + 10$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (a - 1)x^2 - 2bx + 5x + 3c - 1$ fonksiyonları veriliyor. $f(x) = g(x)$ ise $a + b - c$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları düzenlenirse

$$f(x) = (2x - 1) \cdot (x + 2) + 10 = 2x^2 + 4x - x - 2 + 10 = 2x^2 + 3x + 8 \text{ olur.}$$

$$g(x) = (a - 1)x^2 - 2bx + 5x + 3c - 1 = (a - 1)x^2 + (-2b + 5)x + 3c - 1 \text{ olur.}$$

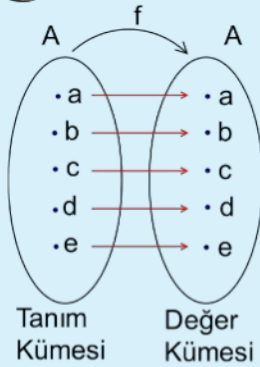
$f(x) = g(x)$ olduğundan x değişkenlerinden üsleri aynı olanların katsayıları birbirine eşit olmalıdır.

$$\text{Buradan } 2 = a - 1 \Rightarrow a = 3,$$

$$3 = -2b + 5 \Rightarrow 2b = 2 \text{ ve } b = 1,$$

$$8 = 3c - 1 \Rightarrow 9 = 3c \text{ ve } c = 3,$$

$$a + b - c = 3 + 1 - 3 = 1 \text{ olur.}$$

Birim (Özdeşlik) Fonksiyon**Bilgi**

A boş kümeden farklı bir küme ve

f, A dan A ya bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ oluyorsa f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir ve I ile gösterilir.

Örneğin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f birim fonksiyon olmak üzere

- $f(7) = 7$
- $f(\sqrt[3]{5} + 2) = \sqrt[3]{5} + 2$
- $f(a + 4) = a + 4$
- $f(x + 10) = x + 10$ olur.

**Örnek 36**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f birim fonksiyon olmak üzere $f(2a + 10) + f(a - 4) = -15$ ise $f(a^2 - 1)$ ifadesinin değerini bulunuz.

**Çözüm**

f birim fonksiyon olduğundan $f(2a + 10) = 2a + 10$ ve $f(a - 4) = a - 4$ olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rcl} f(2a + 10) & = & 2a + 10 \\ + & f(a - 4) & = a - 4 \\ \hline f(2a + 10) + f(a - 4) & = & 3a + 6 \\ - 15 & = & 3a + 6 \\ - 7 & = & a \text{ olur.} \end{array}$$

$$f(a^2 - 1) = a^2 - 1 \Rightarrow a = -7 \text{ için } f((-7)^2 - 1) = (-7)^2 - 1 = 48 \text{ olur.}$$



Örnek 37



Bir çocuk oyun merkezindeki jeton makinesi bozulmuştur. İçine atılan paraya eş değer jetonların alt bölmeye düşmesi gerekirken atılan para olduğu gibi alt bölmeye düşmektedir. Cebinde birer adet 1 Türk lirası, 5 Türk lirası, 10 Türk lirası ve 20 Türk lirası bulunan Tuğba Hanım, çocukları Utku ve Mert'i bu oyun merkezine götürmüş ve jeton makinesine cebindeki paralardan birini atmıştır. Paranın olduğu gibi alt bölmeye düştüğünü görünce aynı işlemi cebindeki bütün paralarla tekrarlamış ve her defasında attığı paranın olduğu gibi alt bölmeye düştüğünü görmüştür. Buna göre bu bozuk jeton makinesinin yaptığı bu işlemi bir fonksiyonla ifade edip bu fonksiyonun türünü yazınız.



Çözüm

Tuğba Hanım'ın cebindeki paraların oluşturduğu küme $\{1, 5, 10, 20\}$ olup fonksiyonun tanım kümesini oluşturur. Tuğba Hanım cebindeki hangi parayı makineye atarsa atsın karşılık olarak makineden aynı parayı almaktadır. Bu durum bir f fonksiyonu ile $f = \{(1, 1), (5, 5), (10, 10), (20, 20)\}$ şeklinde gösterilebilir ve f fonksiyonundaki sıralı ikililerin ikinci bileşenleri görüntü kümesini oluşturur. Buradan bu fonksiyonun görüntü kümesi de $\{1, 5, 10, 20\}$ olur.

Buradan her sayı, yine kendisi ile eşlendiğinden fonksiyon $f(x) = x$ şeklinde de gösterilebilir ve bu fonksiyon birim fonksiyondur.



Örnek 38

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-2)x + 2n + 6$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $m \cdot n$ değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu birim fonksiyon olduğundan $f(x) = x$ olmalıdır. Buna göre x in katsayısı 1 e, diğer terimler 0 a eşittir.

$$f(x) = (m-2)x + 2n + 6$$

$$x = \underbrace{(m-2)}_1 x + \underbrace{2n+6}_0$$

$m-2 = 1$ ve $2n+6 = 0$ olduğundan $m = 3$ ve $n = -3$ olur. Buradan $m \cdot n = 3 \cdot (-3) \Rightarrow m \cdot n = -9$ olur.



Örnek 39

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f birim fonksiyon ve $f(3x-1) = (k+1)x^2 + mx - 2x - n + 5$ olduğuna göre $k+m+n$ değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu birim fonksiyon olduğundan $f(3x-1) = 3x-1$ olur. Buradan

$$f(3x-1) = (k+1)x^2 + (m-2)x - n + 5$$

$$3x-1 = \underbrace{(k+1)}_0 x^2 + \underbrace{(m-2)}_3 x - \underbrace{n+5}_{-1}$$

$$k+1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$$m-2 = 3 \Rightarrow m = 5$$

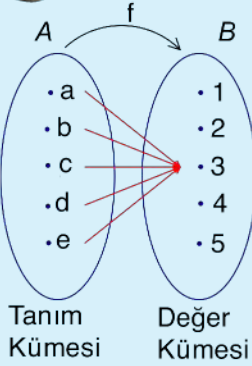
$$-n+5 = -1 \Rightarrow n = 6 \text{ olur.}$$

Buradan $k+m+n = (-1)+5+6 = 10$ olur.

Sabit Fonksiyon



Bilgi



A ve B boş olmayan kümeler ve $k \in B$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için $f(x) = k$ oluyorsa bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.

Yandaki şekilde tanımlanan f fonksiyonu için $f : A \rightarrow B$, $\forall x \in A$ olmak üzere $f(x) = 3$ olur.

Örneğin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}$ olmak üzere

- $f(7) = \sqrt{2}$
- $f(4) = \sqrt{2}$
- $f(\sqrt[3]{5} + 2) = \sqrt{2}$
- $f(x + 10) = \sqrt{2}$ olur.



Örnek 40

Orhan Bey'in mağazasında beş çeşit ürün satılmaktadır. Orhan Bey hesapları kontrol ederken mağazadaki ürünlerin satışlarının yeterli düzeyde olmadığını görmüştür. Bunun üzerine satışları artırmak amacıyla "Her bir ürün sadece 5 Türk lirası." sloganlı bir kampanya başlatmış ve mağazadaki her bir ürünü 5 Türk lirasına satmaya karar vermiştir. Kampanya sonucu satışların istediği düzeye geldiğini görünce kampanyayı sürekli hâle getirmiştir. Buna göre Orhan Bey'in yaptığı kampanyadaki satış stratejisini gösteren bir fonksiyon yazarak bu fonksiyonun türünü bulunuz.



Çözüm

Orhan Bey'in mağazasındaki ürün çeşitlerinin kümesi $A = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Orhan Bey'in mağazasındaki tüm ürünlerin fiyatlarının aynı olması nedeniyle hangi ürün alınırsa alınsın hep 5 lira ödenecektir. Bu durumda

- $f(a) = 5,$
- $f(b) = 5,$
- $f(c) = 5,$
- $f(d) = 5,$
- $f(e) = 5$ olur.

Buradan fonksiyon $f(x) = 5$ olarak yazılabilir. Bu fonksiyon ise sabit fonksiyondur.



Örnek 41

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (t - 4)x + 3t - 1$ ve f sabit fonksiyondur. Buna göre t nin değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)$ sabit bir fonksiyon olduğundan x in katsayısı 0 olmalıdır. Buradan x in katsayısı $t - 4 = 0$ olup $t = 4$ olur.



İpucu

Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ biçiminde verilen $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ eşitliği sağlanır.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

k bir sabit sayı olmak üzere $\frac{ax+b}{cx+d} = k \Rightarrow ax+b = kcx+kd \Rightarrow (a-kc)x+b-kd=0$ eşliğinin sağlanabilmesi için $a-kc=0$ ve $b-kd=0$ olmalıdır. Buradan $a=kc \Rightarrow k=\frac{a}{c}$ ve $b=kd \Rightarrow k=\frac{b}{d}$ elde edilir. Buradan $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ olduğu görülür.



Örnek 42

$g : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = \frac{4x+k+1}{2x-6}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre k nin değerini bulunuz.



Çözüm

$g(x)$ sabit fonksiyon olduğundan

$$\frac{4}{2} = \frac{k+1}{-6}$$

$$2k+2 = -24$$

$$k = -13 \text{ olur.}$$



Örnek 43

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f birim fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g sabit fonksiyon olmak üzere $f(x+3) + g(x) = x+12$ olduğuna göre $f(7) + g(77)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan $f(x+3) = x+3$ olur ve g sabit fonksiyon olduğundan $g(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) olur. Bu durumda

$$f(x+3) + g(x) = x+3+c = x+12 \Rightarrow c=9,$$

$$f(7) = 7 \text{ ve } g(77) = 9,$$

$$f(7) + g(77) = 7+9 = 16 \text{ olur.}$$



Örnek 44

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birim fonksiyon, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olmak üzere $f(7x+5) + g(x-2) = 3 \cdot f(2x-7) + g(x^3)$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.



Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan $f(7x+5) = 7x+5$ ve $f(2x-7) = 2x-7$ olur.

g sabit fonksiyon olduğundan $g(x-2) = g(x^3)$ olur. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$7x+5 + g(x-2) = 3 \cdot (2x-7) + g(x^3)$$

$$7x+5 = 6x-21$$

$$x = -26 \text{ olur.}$$

Doğrusal Fonksiyon



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir. f bir doğrusal fonksiyon ise grafiği bir doğrudur.



Örnek 45

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a - b - 5)x^3 + (a + b + 1)x^2 + ax + b$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon olduğuna göre $f(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f doğrusal fonksiyon olduğundan x^3 ve x^2 li terimlerin katsayılarının 0 olması gerekir. Buradan

$a - b - 5 = 0$ ve $a + b + 1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases} \text{ denklemlerinin ortak çözümünden } a = 2 \text{ ve } b = -3 \text{ olur.}$$

Bu değerler $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda yerine yazılırsa $f(x) = 2x - 3$ olur.

Buradan $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$ olur.



Örnek 46

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(1) = 5$, $f(2) = 8$ olduğuna göre $f(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f doğrusal fonksiyon olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

$x = 1$ için $f(1) = a + b = 5$ olur.

$x = 2$ için $f(2) = 2a + b = 8$ olur.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \text{ denklemlerinin ortak çözümünden } a = 3 \text{ ve } b = 2 \text{ olur.}$$

Bu değerler $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda yerine yazılırsa $f(x) = 3x + 2$ ve $f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$ bulunur.



Örnek 47

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(x + 1) + f(x) = 10x - 7$ ise $f(-2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f bir doğrusal fonksiyon olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindedir. Buradan

$f(x + 1) = a \cdot (x + 1) + b = ax + a + b$ olur. Bu değerler $f(x + 1) + f(x) = 10x - 7$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f(x + 1) + f(x) = ax + a + b + ax + b = 10x - 7 \Rightarrow 2ax + a + 2b = 10x - 7 \text{ olur.}$$

Buradan $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ ve $a + 2b = -7 \Rightarrow 5 + 2b = -7 \Rightarrow b = -6$ olur.

Buradan $f(x) = ax + b = 5x - 6$ olur. $x = -2$ için $f(-2) = 5 \cdot (-2) - 6 = -16$ olur.

Tek Fonksiyon ve Çift Fonksiyon



Bilgi

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için

- $f(-x) = f(x)$ olan f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.
- $f(-x) = -f(x)$ olan f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.



Örnek 48

Aşağıda verilen fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3$ b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3x$ c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 5x^5 - 8x + 1$



Çözüm

- a) $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.
- b) $g(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
 $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyondur.
- c) $h(x) = 5x^5 - 8x + 1$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa $h(-x) = 5(-x)^5 - 8(-x) + 1 = -5x^5 - 8x + 1$ olur. $h(-x) \neq h(x)$ ve $h(-x) \neq -h(x)$ olduğundan h fonksiyonu çift fonksiyon ya da tek fonksiyon değildir.



Örnek 49

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon; $f(5) = 7$ ve $2x - f(-x) = 3g(-x) + x^2 + 5$ olmak üzere $g(5)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan $f(-x) = f(x)$ olur. Buradan $f(-5) = f(5) = 7$ bulunur.
 g fonksiyonu bir tek fonksiyon olduğundan $g(-x) = -g(x)$ olur. Buradan $g(-5) = -g(5)$ bulunur.
 $2x - f(-x) = 3g(-x) + x^2 + 5$ eşitliğinde x yerine 5 yazılırsa
 $2 \cdot 5 - f(-5) = 3g(-5) + 5^2 + 5 \Rightarrow 10 - 7 = -3g(5) + 30 \Rightarrow -27 = -3g(5) \Rightarrow g(5) = 9$ olur.



Örnek 50

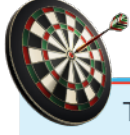
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x^3 + (a+1)x^2 + bx + c + 4$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $a \cdot c$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

Verilen $y = f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $f(-x) = -f(x)$ olmalıdır.
 $f(-x) = -5x^3 + (a+1)x^2 - bx + c + 4$ ve $-f(x) = -5x^3 - (a+1)x^2 - bx - c - 4$ olduğundan
eşitliğin sağlanması için aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşit olur. Buradan
 $a+1 = -a-1 \Rightarrow a = -1$ ve $c+4 = -c-4 \Rightarrow c = -4$ bulunur. Dolayısıyla $a \cdot c = (-1) \cdot (-4) = 4$ olur.

Parçalı Fonksiyon



Bilgi

Tanım kümesinin ayırık alt kümelerinde farklı kurallarla belirlenen fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** ya da **parçalı fonksiyonlar** denir. Örneğin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & a \leq x < b \text{ ise} \\ h(x), & b \leq x \leq c \text{ ise} \\ r(x), & c < x \leq d \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde olan ve $g(x), h(x), r(x)$ fonksiyonlarından oluşan f fonksiyonuna **parçalı fonksiyon** denir. a, b, c ve d fonksiyonun kritik noktalarıdır.



Örnek 51



Bir telefon operatörünün bir aylık sesli arama tarifi aşağıdaki gibidir.

- Toplam 200 dakikaya kadar olan aramalar sabit 20 Türk lirasıdır.
- 200 dakikadan sonra her 1 dakika için ekstra 25 kuruştur.
- Ücret 400 dakikadan sonra 70 Türk lirasına sabitlenmiştir.

Buna göre telefon operatörünün sesli aramalarla ilgili Türk lirası cinsinden bir aylık fiyat tarifesinin kurallarını belirten bir fonksiyon yazınız.



Çözüm

Dakika cinsinden konuşma süresi x , Türk lirası cinsinden ücreti veren fonksiyon $f(x)$ olsun. Buna göre bu tarifenin kuralları, uygun tanım aralığında aşağıdaki gibi bir fonksiyon ile gösterilebilir.

$$f(x) = \begin{cases} 20, & 0 \leq x \leq 200 \text{ ise} \\ 20 + \frac{x-200}{4}, & 200 < x \leq 400 \text{ ise} \\ 70, & 400 < x \text{ ise} \end{cases}$$



Örnek 52

Tanım kümesi $[-3, 10)$ olan f fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & -3 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x^2, & 2 \leq x \leq 6 \text{ ise} \\ 5 - 2x, & 6 < x < 10 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre $f(0) + f(6) + f(9)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$0 \in [-3, 2)$ olduğundan $f(x) = 3x + 4$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(0) = 3 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$ olur.

$6 \in [2, 6]$ olduğundan $f(x) = x^2$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(6) = 6^2 = 36$ olur.

$9 \in (6, 10)$ olduğundan $f(x) = 5 - 2x$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(9) = 5 - 2 \cdot 9 = 5 - 18 = -13$ olur.

Buradan $f(0) + f(6) + f(9) = 4 + 36 - 13 = 27$ olur.



Örnek 53

Emre, Damla ve Yağmur'un satış danışmanlığını yaptığı bir firmanın maaş politikası; satış danışmanının sattığı ürün adedi x , kişinin aldığı maaş miktarı Türk lirası cinsinden $f(x)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 800, & x < 100 \text{ ise} \\ 10x + 700, & 100 \leq x < 150 \text{ ise} \\ 12x + 600, & x \geq 150 \text{ ise} \end{cases}$$

Kasım ayı satış ve maaş durumu aşağıda verilmiştir.

- I. Toplam 350 ürün satılmıştır.
- II. Emre, Damla'nın iki katı, Yağmur'un dört katı ürün satmıştır.
- III. Dayanışma amacıyla o ayki maaşı en fazla olan çalışan, o ayki maaşı en az olan çalışana maaşının %10'unu vermektedir.

Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) Damla'nın kaç ürün sattığını bulunuz.
- b) Emre'nin eline geçen tutarın kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.
- c) Aynı satış oranlarıyla 420 ürün satılsaydı dayanışma amacıyla Emre'nin Yağmur'a kaç Türk lirası yardımda bulunabileceğini hesaplayınız.



Çözüm

Emre'nin sattığı ürün miktarı $4k$ olarak seçilirse Damla'nın sattığı ürün miktarı $2k$ ve Yağmur'un sattığı ürün miktarı k olur. Toplam 350 ürün satıldığından $4k + 2k + k = 350 \Rightarrow k = 50$ olur. Buna göre Emre 200 ürün, Damla 100 ürün ve Yağmur 50 ürün satmıştır.

- a) Damla'nın sattığı ürün sayısı, $2k = 2 \cdot 50 = 100$ olur.
- b) Emre'nin sattığı ürün sayısı, $4k = 4 \cdot 50 = 200$ olur. Buradan Emre'nin maaşı,
 $f(x) = 12x + 600$ kuralından $f(200) = 12 \cdot 200 + 600 = 3000$ Türk lirası olur. Emre maaşının %10'u olan $3000 \cdot \frac{10}{100} = 300$ Türk lirasını Yağmur'a vereceğinden Emre'nin eline geçen tutar $3000 - 300 = 2700$ Türk lirası olur.
- c) $7k = 420 \Rightarrow k = 60$ olur.
 Emre'nin sattığı ürün sayısı, $4k = 4 \cdot 60 = 240$ olur. Buradan Emre'nin maaşı,
 $f(x) = 12x + 600$ kuralından $f(240) = 12 \cdot 240 + 600 = 3480$ Türk lirası olur. Emre'nin Yağmur'a vereceği para miktarı, maaşının %10'u olan $3480 \cdot \frac{10}{100} = 348$ Türk lirası olur.



Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için
 $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$, $f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları $\forall x \in A \cap B$ için
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ şeklinde tanımlanır.

**Örnek 54**

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ ve $g : \{2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6 - 2x$ fonksiyonları için $(f+g)$ nin görüntü kümesini bulunuz.

**Çözüm**

$f+g$ nin tanım kümesi f ile g fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimi ile bulunur.

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\} \text{ olur.}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = (2^2 + 2) + (6 - 2 \cdot 2) = (4 + 2) + (6 - 4) = 6 + 2 = 8 \text{ olur.}$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = (3^2 + 3) + (6 - 2 \cdot 3) = (9 + 3) + (6 - 6) = 12 + 0 = 12 \text{ olur.}$$

Buradan $(f+g)$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{8, 12\}$ olur.

**Örnek 55**

$f = \{(-1, 3), (0, 1), (1, -2), (2, 2), (5, -2)\}$ ve $g = \{(-2, 1), (0, 2), (2, 3), (5, 3)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $f+g$ ve $f-g$ ifadelerini bulunuz.

**Çözüm**

- $f+g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin toplamına eşittir. Buradan f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerindeki ortak elemanlar $\{0, 2, 5\}$ olur. Buradan

$$f+g = \{(0, 1+2), (2, 2+3), (5, -2+3)\} = \{(0, 3), (2, 5), (5, 1)\} \text{ olur.}$$

- $f-g$, sırasıyla f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin farkına eşittir. Buradan f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerindeki ortak elemanlar $\{0, 2, 5\}$ olur. Buradan

$$f-g = \{(0, 1-2), (2, 2-3), (5, -2-3)\} = \{(0, -1), (2, -1), (5, -5)\} \text{ olur.}$$

**Örnek 56**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 9x - 14$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 5x - 7$ fonksiyonları için $(f+g)(x)$ ve $(f-g)(x)$ ifadelerini bulunuz.

**Çözüm**

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x^2 + 9x - 14) + (x^2 - 5x - 7) = 4x^2 + 4x - 21 \text{ olur.}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x^2 + 9x - 14) - (x^2 - 5x - 7) = 2x^2 + 14x - 7 \text{ olur.}$$

**Örnek 57**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 1$ fonksiyonları için $(f+g)(3)$ ve $(f-g)(-2)$ ifadelerinin değerlerini bulunuz.

**Çözüm**

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = [3 \cdot (3) - 1] + [5 \cdot (3) + 1] = 8 + 16 = 24 \text{ olur.}$$

$$(f-g)(-2) = f(-2) - g(-2) = [3 \cdot (-2) - 1] - [5 \cdot (-2) + 1] = -7 - (-9) = 2 \text{ olur.}$$



Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için
 $f \cdot g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonları $\forall x \in A \cap B$ için
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ şeklinde tanımlanır.
 Ayrıca $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ olarak tanımlanır.



Örnek 58

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $f(x) = 2x + 5$, $(3f - 2g)(x) = 4x + 7$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm

Fonksiyonların fark işlemi kuralından $(3f - 2g)(x) = 3f(x) - 2g(x) = 4x + 7$ olur. Bu eşitlikte $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$3f(x) - 2g(x) = 4x + 7$$

$$3 \cdot (2x + 5) - 2g(x) = 4x + 7$$

$$6x + 15 - 4x - 7 = 2g(x)$$

$$2x + 8 = 2g(x)$$

$$g(x) = x + 4 \text{ olur.}$$



Örnek 59

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$ fonksiyonları için

- a) $(f \cdot g)(-1)$ değerini bulunuz. b) $(\frac{f}{g})(6)$ değerini bulunuz.
 c) $(2f - 3g)(2)$ değerini bulunuz. ç) $(f + 2g)(-3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

a) $(f \cdot g)(-1) = f(-1) \cdot g(-1) = [(-1)^2 - 1] \cdot [3 \cdot (-1)] = 0 \cdot (-3) = 0$ olur.

b) $(\frac{f}{g})(6) = \frac{f(6)}{g(6)} = \frac{6^2 - 1}{3 \cdot 6} = \frac{35}{18}$ olur.

c) $(2f - 3g)(2) = 2 \cdot f(2) - 3 \cdot g(2) = 2 \cdot (2^2 - 1) - 3 \cdot (3 \cdot 2) = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 6 - 18 = -12$ olur.

ç) $(f + 2g)(-3) = f(-3) + 2 \cdot g(-3) = ((-3)^2 - 1) + 2 \cdot (3 \cdot (-3)) = 8 + 2 \cdot (-9) = 8 - 18 = -10$ olur.



Örnek 60

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$ fonksiyonları için

$(f \cdot g)(x)$ ve $(\frac{f}{g})(x)$ ifadelerini bulunuz.



Çözüm

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 3) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$ olur.

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x - 2}$ olur.

**Örnek 61**

$f = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, -2), (2, 4)\}$ ve $g = \{(-3, 4), (-1, 2), (0, 1), (2, 3)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonları bulunuz.

- a) $2 \cdot f$ b) $g + 3$ c) $f + g$ ç) $f \cdot g$ d) $\frac{f}{g}$

**Çözüm**

$$\begin{aligned} \text{a) } 2f &= \{(-2, 2 \cdot f(-2)), (-1, 2 \cdot f(-1)), (0, 2 \cdot f(0)), (1, 2 \cdot f(1)), (2, 2 \cdot f(2))\} \\ &= \{(-2, 2 \cdot 1), (-1, 2 \cdot 2), (0, 2 \cdot 3), (1, 2 \cdot (-2)), (2, 2 \cdot 4)\} \\ &= \{(-2, 2), (-1, 4), (0, 6), (1, -4), (2, 8)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g + 3 &= \{(-3, g(-3) + 3), (-1, g(-1) + 3), (0, g(0) + 3), (2, g(2) + 3)\} \\ &= \{(-3, 4 + 3), (-1, 2 + 3), (0, 1 + 3), (2, 3 + 3)\} \\ &= \{(-3, 7), (-1, 5), (0, 4), (2, 6)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

c) $f + g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin toplamına eşittir.

$$\begin{aligned} f + g &= \{(-1, 2 + 2), (0, 3 + 1), (2, 4 + 3)\} \\ &= \{(-1, 4), (0, 4), (2, 7)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ç) $f \cdot g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin çarpımına eşittir.

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{(-1, 2 \cdot 2), (0, 3 \cdot 1), (2, 4 \cdot 3)\} \\ &= \{(-1, 4), (0, 3), (2, 12)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

d) $\frac{f}{g}$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin bölümüne eşittir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= \left\{ \left(-1, \frac{2}{2} \right), \left(0, \frac{3}{1} \right), \left(2, \frac{4}{3} \right) \right\} \\ &= \left\{ (-1, 1), (0, 3), \left(2, \frac{4}{3} \right) \right\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

**Örnek 62**

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f = \{(0, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$ ve $g = \{(-1, 1), (1, 7), (3, 3), (5, 2)\}$ olarak veriliyor.

Buna göre aşağıdaki fonksiyonları liste biçiminde yazınız.

- a) $3f - g$ b) $f \cdot g$

**Çözüm**

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{-1, 1, 3, 5\}$ olup f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişim kümesi, $A \cap B = \{1, 3\}$ olur. Buradan 1 ve 3 elemanlarının görüntüleri bulunur.

$f(1) = 5$, $g(1) = 7$ ve $f(3) = 4$, $g(3) = 3$ olur.

$$\begin{aligned} \text{a) } (3f - g)(1) &= 3f(1) - g(1) = 3 \cdot 5 - 7 = 15 - 7 = 8 \\ (3f - g)(3) &= 3f(3) - g(3) = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9 \\ 3f - g &= \{(1, 8), (3, 9)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \cdot g)(1) &= f(1) \cdot g(1) = 5 \cdot 7 = 35 \\ (f \cdot g)(3) &= f(3) \cdot g(3) = 4 \cdot 3 = 12 \\ f \cdot g &= \{(1, 35), (3, 12)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

**Örnek 63**

$f = \{(-2, 5), (0, 3), (1, 2), (2, 4)\}$ ve $g = \{(-1, 3), (2, 4), (0, 5)\}$ ise $\frac{(f+2g)(0)}{(f \cdot g)(2)}$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\frac{(f+2g)(0)}{(f \cdot g)(2)} = \frac{f(0) + 2g(0)}{f(2) \cdot g(2)} = \frac{3 + 2 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{13}{16} \text{ olur.}$$

**Örnek 64**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ için $(f \cdot g)(x) = x^3 - x^2 + 3x - 4$ ve $f(x) = 2x - 6$ olduğuna göre $g(2)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

$(f \cdot g)(x) = x^3 - x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunda $x = 2$ için $(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = (2)^3 - (2)^2 + 3 \cdot 2 - 4$ olur.

Buradan $(2 \cdot 2 - 6) \cdot g(2) = 8 - 4 + 6 - 4$ ve $(4 - 6) \cdot g(2) = 6 \Rightarrow g(2) = -3$ olur.

**Örnek 65**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$(f+g)(x) = 4x + 6$ ve $(2f-g)(x) = 5x - 3$ olduğuna göre $(f \cdot g)(-4)$ değerini bulunuz.

**Çözüm**

Fonksiyonların toplam ve fark işlemi tanımından

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 4x + 6$ ve $(2f-g)(x) = 2f(x) - g(x) = 5x - 3$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\left. \begin{array}{l} f(x) + g(x) = 4x + 6 \\ 2f(x) - g(x) = 5x - 3 \end{array} \right\} \text{ ifadeleri taraf tarafa toplanır} \Rightarrow 3f(x) = 9x + 3 \Rightarrow f(x) = 3x + 1 \text{ olur.}$$

$f(x) + g(x) = 4x + 6$ fonksiyonunda $f(x)$ yerine $3x + 1$ yazılırsa

$3x + 1 + g(x) = 4x + 6 \Rightarrow g(x) = x + 5$ bulunur. Buradan fonksiyonlarda çarpma işlemi tanımından

$(f \cdot g)(-4) = f(-4) \cdot g(-4) = (3 \cdot (-4) + 1) \cdot (-4 + 5) = (-11) \cdot (1) = -11$ olur.

**Örnek 66**

İzmir ile Van arasındaki mesafe karayolu ile 1755 km dir. İzmir'de bulunan Leyla, otomobili ile sabit 80 km/sa, Van'da bulunan Mecnun otomobili ile sabit 90 km/sa hızla aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyorlar. Leyla ile Mecnun'un x saat sonra aralarındaki mesafeyi veren $f(x)$ eşleştirme kuralını bulunuz.

**Çözüm**

İzmir'de bulunan Leyla Van'a hareket ettiğinde 1 saatte 80 km, x saatte ise $80x$ km yol alır.

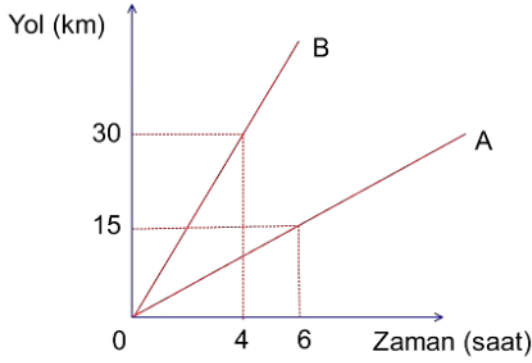
Van'da bulunan Mecnun İzmir'e hareket ettiğinde 1 saatte 90 km, x saatte ise $90x$ km yol alır.

Birbirlerine doğru x saatte $80x + 90x = 170x$ km yaklaşır.

İzmir ile Van arası 1755 km olduğundan x saat sonra aralarındaki mesafe $f(x) = 1755 - 170x$ olur.



Örnek 67



Sabit hızlarla hareket eden A ve B marka araçların yol-zaman grafiği yanda verilmiştir. Aynı anda ve aynı yönde harekete başlayan bu iki aracın zamana (saat) bağlı hızlarını veren birer fonksiyon yazıp bu araçların aralarındaki mesafenin kaç saat sonra 25 km olacağını bulunuz.



Çözüm

A aracı, 6 saatte 15 kilometre yol aldığından 1 saatte $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ kilometre yol alır. x saat cinsinden zaman olmak üzere alınan yolu gösteren fonksiyon $f(x) = \frac{5}{2}x$ olur.

B aracı, 4 saatte 30 kilometre yol aldığından 1 saatte $\frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ kilometre yol alır. x saat cinsinden zaman olmak üzere alınan yolu gösteren fonksiyon $h(x) = \frac{15}{2}x$ olur.

t saat sonra aralarındaki mesafe 25 km olsun.

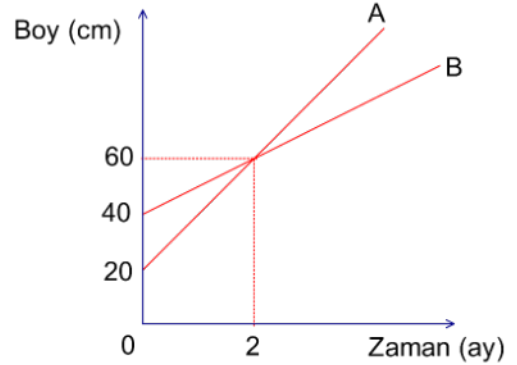
$$h(t) - f(t) = 25 \Rightarrow \frac{15}{2}t - \frac{5}{2}t = 25 \Rightarrow \frac{10t}{2} = 25 \Rightarrow t = 5 \text{ olur.}$$

Buna göre 5 saat sonra bu iki araç arasındaki mesafe 25 kilometre olur.



Örnek 68

Aynı anda dikilen A ve B fidanlarının boylarındaki artış yandaki grafikte gösterilmiştir. Bu fidanların zamana (ay) bağlı boyunu veren birer fonksiyon yazıp fidanların dikildikten kaç ay sonra boylarının farkının 60 cm olacağını bulunuz.



Çözüm

20 cm olarak dikilen A fidanının boyu, 2. ayın sonunda 60 cm ye ulaştığından fidan 2 ayda 40 cm uzamıştır. Buna göre fidan 1 ayda $\frac{40}{2} = 20$ cm uzar. A fidanının boyunu gösteren grafik doğrusal olduğundan A fidanı, her ay 20 cm uzayacaktır.

Bu fidanın dikildiği aydaki boyu 40 cm, 2 ay sonraki boyu 60 cm ye ulaştığından fidan 2 ayda 20 cm uzamıştır. Buna göre fidan 1 ayda $\frac{20}{2} = 10$ cm uzar. B fidanının boyunu gösteren grafik de doğrusal olduğundan B fidanı her ay 10 cm uzayacaktır.

A fidanının x zamanına bağlı boyunu veren fonksiyon $f(x) = 20 + 20x$,

B fidanının x zamanına bağlı boyunu veren fonksiyon $g(x) = 40 + 10x$,

x ay sonra boylarının farkı 60 cm olacağından

$$f(x) - g(x) = 60 \Rightarrow (20 + 20x) - (40 + 10x) = 60 \Rightarrow 10x - 20 = 60 \Rightarrow x = 8 \text{ olur.}$$



ALİŞTIRMALAR

1. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = (a+3)x + b - 2$, $g(x) = 5x - a - 6$ ve $f(x) = g(x)$ olduğuna göre $a \cdot b$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere g fonksiyonu birim fonksiyondur.
 $g(2x+5) = (a+1)x^2 + (b-2)x + c + 7$ olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ işleminin sonucunu bulunuz.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2+a)x^5 - 3x^4 + (b-3)x^3 - 6$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğuna göre $a - b$ ifadesinin değerini bulunuz.
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \text{ ise} \\ x^2+1, & 0 \leq x < 3 \text{ ise} \\ \frac{5x+3}{2}, & 3 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$
 olduğuna göre $f(-2) + f(1) + f(4)$ değerini bulunuz.
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere
 $f(x) = 11x - 1$, $g(x) = x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre
 a) $(f+2g)(7)$ ifadesinin değerini bulunuz.
 b) $(f \cdot g)(4)$ ifadesinin değerini bulunuz.
 c) $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.
6. $f = \{(-1, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
 $g = \{(0, 1), (2, 1), (3, 5), (4, 1)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre
 a) $(f-2g)(0)$ ifadesinin değerini bulunuz.
 b) $(3f+4g)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. 48 litrelik benzin deposu bulunan A aracı saatte 6 litre, 30 litrelik benzin deposu bulunan B aracı saatte 3 litre benzin tüketmektedir. A ve B araçlarının benzin deposu tam dolu iken bu araçlar kesintisiz yol alıyor. Aynı anda harekete başlayan bu iki aracın deposunda kalan benzin miktarını gösteren bir yakıt-zaman grafiği çizip harekete başladıktan kaç saat sonra depolarında eşit miktarda benzin kalacağını bulunuz.

8.

	2010	2015
A okulu	160	180
B okulu	820	790

A ve B okullarının bazı yıllara ait öğrenci sayıları yukarıdaki tabloda verilmiştir. A okulunun öğrenci sayısının bir önceki yıla göre aynı miktarda artmakta, B okulunun öğrenci sayısının ise bir önceki yıla göre aynı miktarda azalmakta olduğu bilindiğine göre bu iki okulun hangi yılda öğrenci sayılarının eşit olacağını bulunuz.

9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olmak üzere
 $f(x+1) + f(x-1) = 10x - 12$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-2)$ değerini bulunuz.
10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ birim fonksiyon,
 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olmak üzere $\frac{f(2x+3) + g(x) - 2x}{4} = 5$ fonksiyonu veriliyor.
 Buna göre $g(2018)$ ifadesinin değerini bulunuz.
11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \frac{2x-4}{5}$ için
 $f(3m-2) = 5 \cdot f(m-1)$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

10.2.1.2. Fonksiyonların Grafikleri

Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde $y = ax + b$ doğrusunun grafiğini belirtir. Bir doğrunun grafiğini dik koordinat sisteminde çizmek için bu doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla $y = ax + b$ denklemini sağlayan en az 2 tane (x, y) sıralı ikilisi seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru parçası oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.



Örnek 69

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Çözüm

1. yol

$y = f(x)$ fonksiyonunun geçtiği herhangi üç noktayı belirlemek için x yerine tanım kümesinden, farklı üç eleman seçilerek y değerleri bulunur.

x	-1	0	1
$y = f(x)$	1	2	3

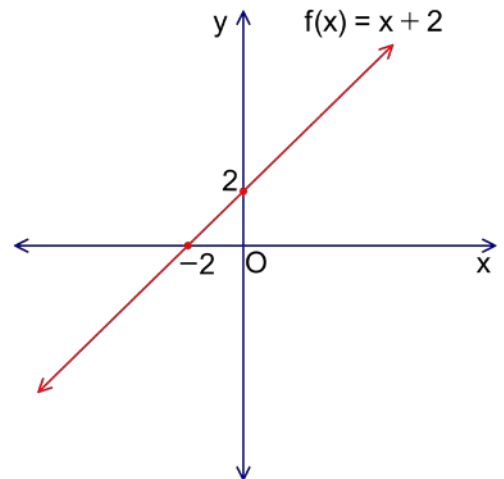
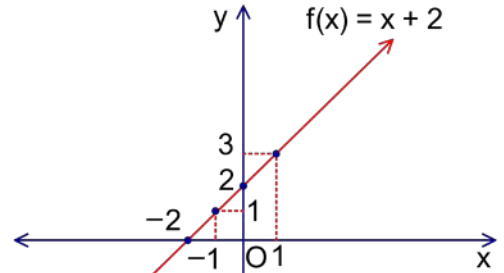
Buradan $(-1, 1)$, $(0, 2)$ ve $(1, 3)$ noktaları elde edilir. Fonksiyon doğrusal olduğundan fonksiyonu sağlayan diğer noktalar da bu doğru üzerindedir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

2. yol

$y = x + 2$ denkleminde x yerine 0 yazılarak fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği nokta bulunur. Daha sonra y yerine 0 yazılarak fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği nokta bulunur. Bulunan bu iki noktadan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

$x = 0$ için $y = 2$ olur. Grafik y eksenini $(0, 2)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $x = -2$ olur. Grafik x eksenini $(-2, 0)$ noktasında keser.





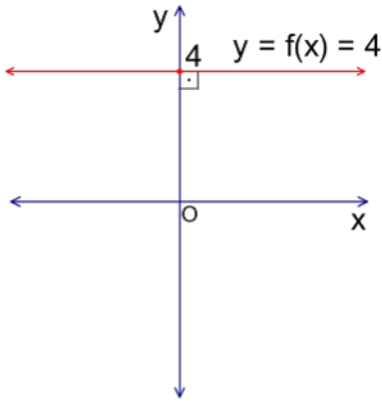
Örnek 70

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Çözüm

$y = 4$ doğrusunun grafiği $(0, 4)$ noktasından geçen ve x eksenine paralel bir doğru grafiğidir. Bu grafik aşağıdaki gibi çizilebilir.



Örnek 71

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

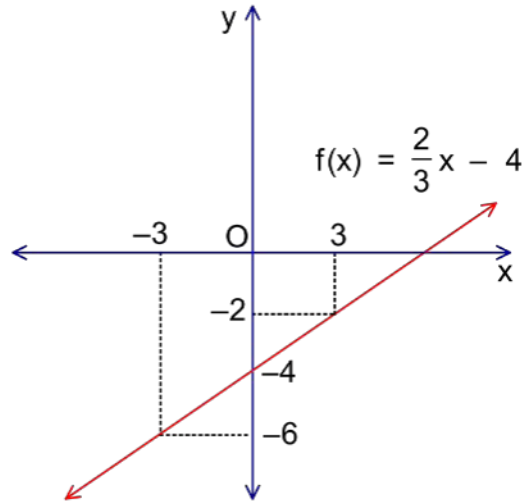


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine $-3, 0, 3$ değerleri yazılarak y değerleri bulunur.

x	-3	0	3
$y = f(x)$	-6	-4	-2

Buradan $(-3, -6)$, $(0, -4)$ ve $(3, -2)$ noktaları elde edilir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.



Örnek 72

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

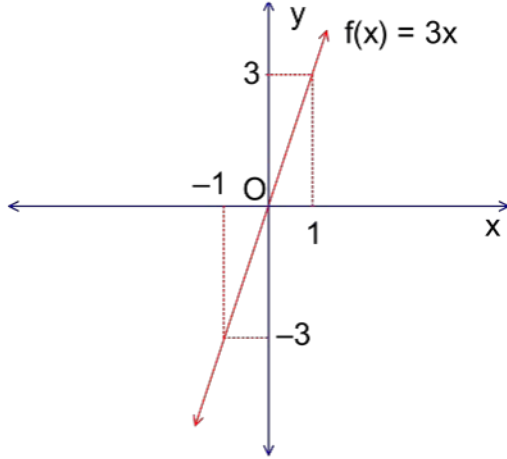


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine $-1, 0, 1$ değerleri yazılarak y değerleri bulunur.

x	-1	0	1
$y = f(x)$	-3	0	3

Buradan $(-1, -3)$, $(0, 0)$ ve $(1, 3)$ noktaları elde edilir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.



$f(x) = ax$ biçimindeki doğrusal fonksiyon grafiklerinin orijinden geçtiğine dikkat ediniz.

Parçalı Fonksiyonların Grafikleri



Örnek 73

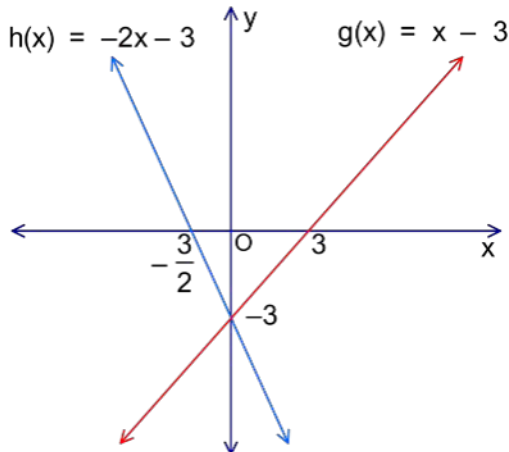
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq 0 \text{ ise} \\ -2x-3, & x > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun grafiğini çiziniz.}$$

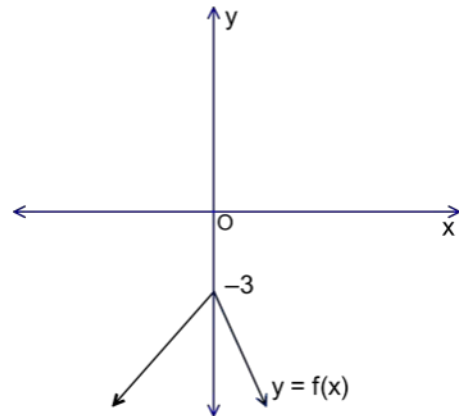


Çözüm

Önce f fonksiyonu $g(x) = x-3$ ve $h(x) = -2x-3$ olmak üzere iki ayrı fonksiyona ayrılarak bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.



g fonksiyonunun $(-\infty, 0]$ aralığındaki parçası ve h fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki parçası alınarak f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.





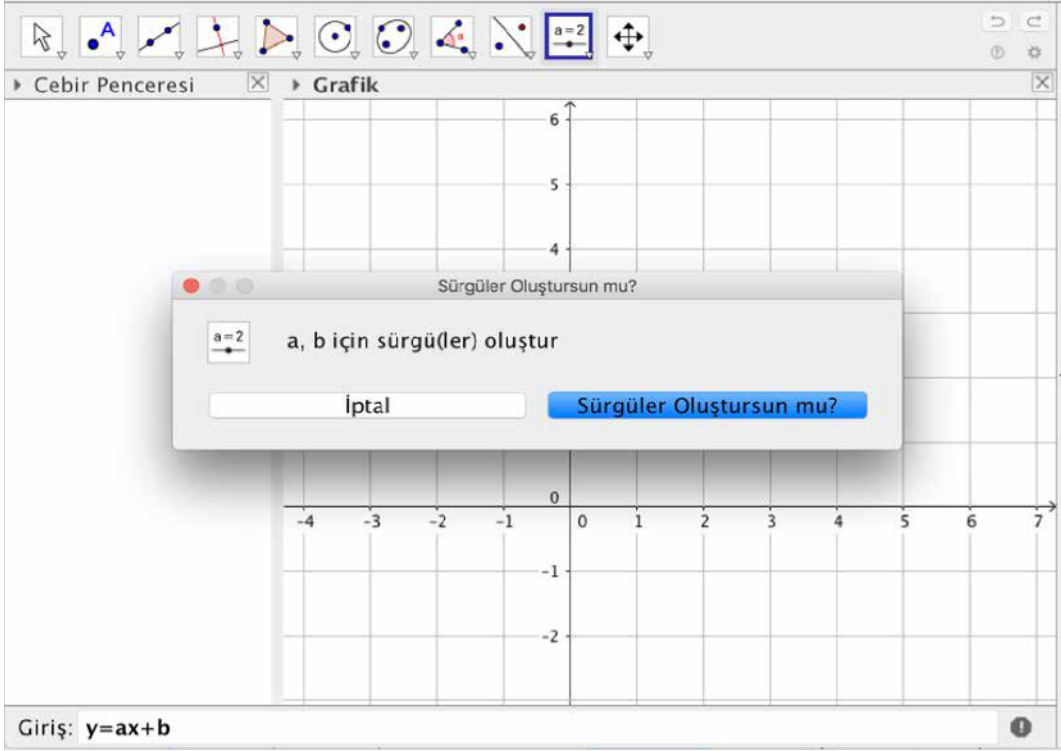
Örnek 74

$f(x) = ax + b$ şeklinde verilen bir doğrusal fonksiyonun grafiğini bir matematik yazılımı olan GeoGebra programı ile çizerek a ve b katsayıları ile fonksiyonun grafiği arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

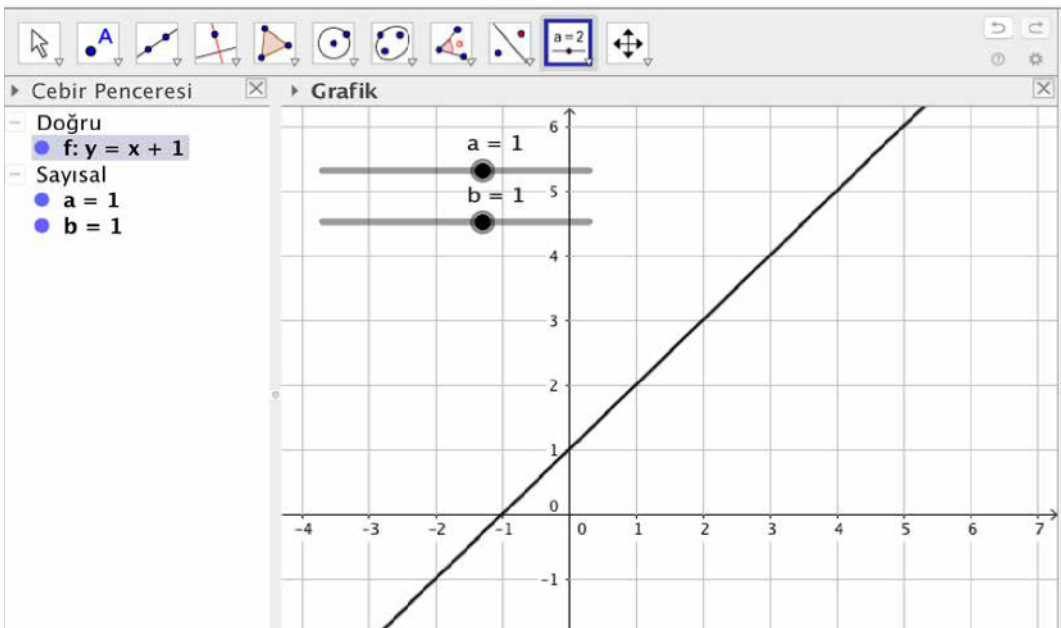


Çözüm

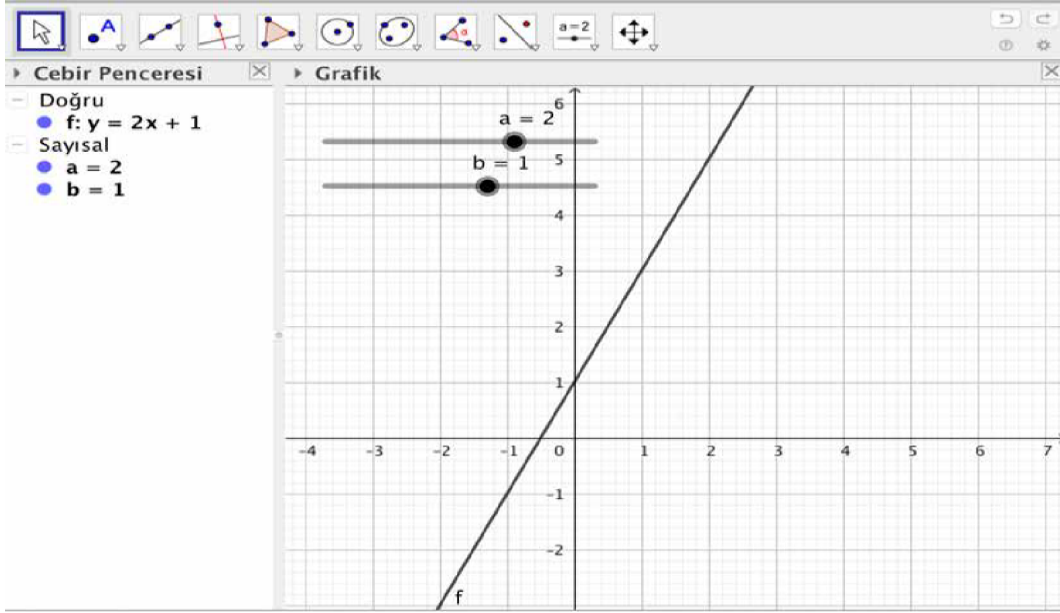
GeoGebra programını açınız. Giriş ekranına $y = ax + b$ yazınız ve Enter tuşuna basınız. Ekrana gelen kutuda “Sürgüler Oluştursun mu?” sekmesini seçiniz.



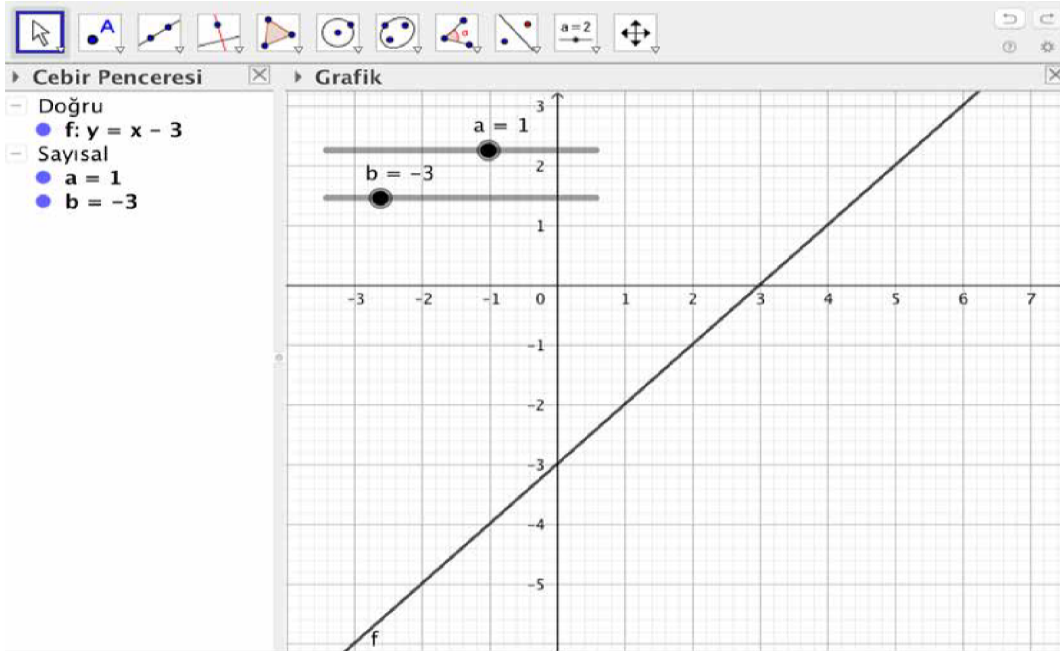
Bu işlemler yapıldığında aşağıdaki gibi bir grafik oluşacaktır.



b sürgüsü 1 değerinde sabit iken a sürgüsü hareket ettirildiğinde doğrunun eğiminin değiştiği görülür. Örneğin $a = 2$ ve $b = 1$ olduğunda grafik aşağıdaki gibi görünmektedir. Bu durumda a değerinin değişmesi doğrunun eğiminin değişmesi anlamına gelir.



a sürgüsü 1 değerinde sabit iken b değeri değiştirildiğinde fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın değiştiği görülür. Örneğin $a = 1$ ve $b = -3$ olduğunda grafik aşağıdaki gibi görünmektedir. Bu durumda b değerinin değişmesi doğrunun y eksenini kestiği noktanın değişmesi anlamına gelir.



Sonuç olarak $f(x) = ax + b$ şeklinde verilen bir doğrusal fonksiyonun grafiğinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar, a ve b katsayılarının değerlerine bağlı olarak değişmektedir.



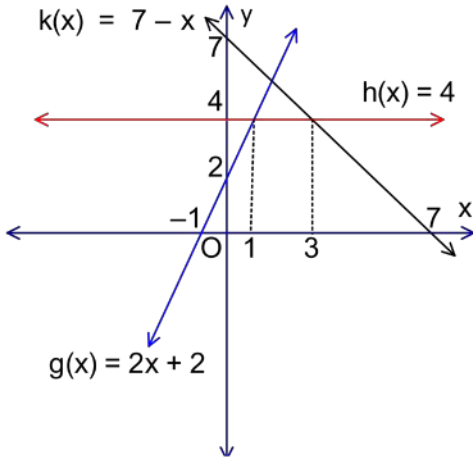
Örnek 75

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & 1 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 7-x, & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

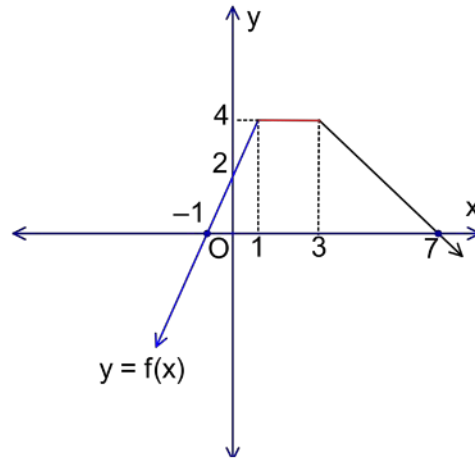


Çözüm

Önce f fonksiyonu $g(x) = 2x + 2$, $h(x) = 4$ ve $k(x) = 7 - x$ olmak üzere üç ayrı fonksiyona ayrılarak bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.



g fonksiyonunun $(-\infty, 1)$ aralığındaki parçası, h fonksiyonunun $[1, 3]$ aralığındaki parçası ve k fonksiyonunun $(3, \infty)$ aralığındaki parçası alınarak f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



ALİŞTIRMALAR

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = x + 5$ b) $h(x) = 2x - 8$

c) $g(x) = 6 - 3x$ ç) $m(x) = \frac{3}{4}x - 9$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 12$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

3. $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ 3, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 4, & 3 < x \leq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

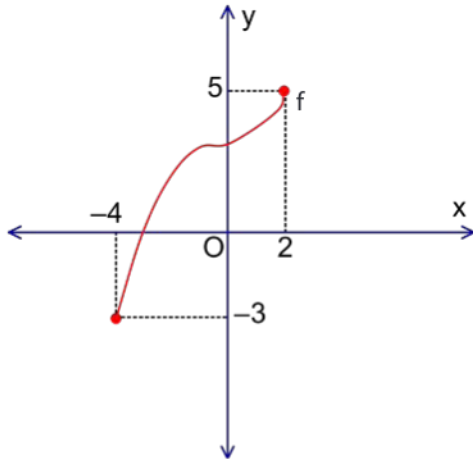
a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \text{ ise} \\ 6, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & -1 \leq x < 4 \text{ ise} \\ 7, & x \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

10.2.1.3. Grafiği Verilen Fonksiyonlar ile İlgili Problemler



Örnek 76



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bularak bu fonksiyonun alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.



Çözüm

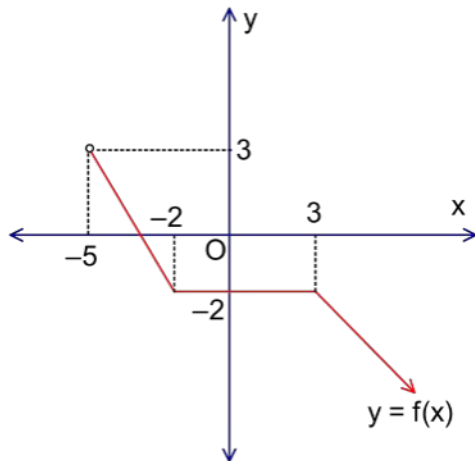
Grafiği verilen bir fonksiyonun tanım kümesi, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların birinci bileşenlerinin (apsis) oluşturduğu kümedir. Buradan fonksiyonun tanım kümesi $[-4, 2]$ dir.

Grafiği verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların ikinci bileşenlerinin (ordinat) oluşturduğu kümedir. Buradan fonksiyonun görüntü kümesi $[-3, 5]$ dir.

Ayrıca bu grafikte fonksiyonun alabileceği en büyük değer, görüntü kümesinin en büyük elemanı olan 5 ; en küçük değer ise görüntü kümesinin en küçük elemanı olan -3 tür.



Örnek 77



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

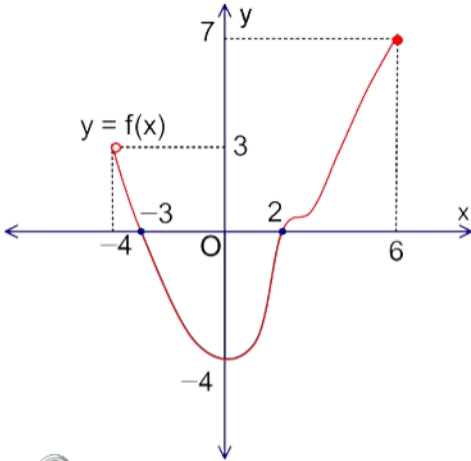


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi bu fonksiyonun grafiğinin geçtiği noktaların apsilerinden, görüntü kümesi bu fonksiyonun grafiğinin geçtiği noktaların ordinatlarından oluşur. Buradan fonksiyonun tanım kümesi $(-5, \infty)$, görüntü kümesi $(-\infty, 3)$ dir.



Örnek 78



Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulup bu fonksiyonun **en büyük** ve **en küçük** değerlerini bulunuz.

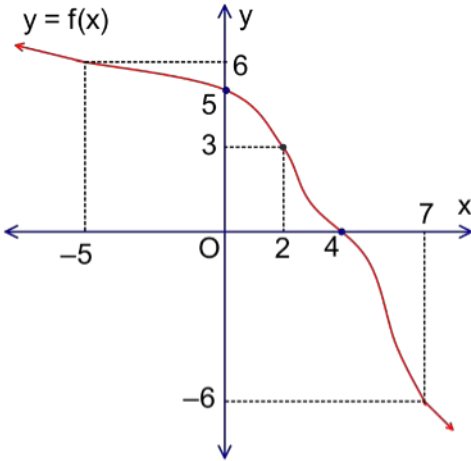


Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesi $(-4, 6]$ ve görüntü kümesi $[-4, 7]$ olur. Fonksiyonun en büyük değeri 7, en küçük değeri -4 olur.



Örnek 79



Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\frac{f(2) - f(7) + f(-5)}{f(0) + f(4)}$ işleminin sonucunu bulunuz.

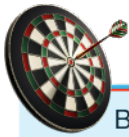


Çözüm

$f(a)$ değerinin bulunabilmesi için x eksenindeki a noktasından fonksiyon grafiğine doğru bu eksene dik bir doğru parçası çizilir. Bu doğrunun grafiği kestiği noktadan y eksenine çizilen dik doğrunun y eksenini kestiği nokta $f(a)$ nın değeridir. Buna göre

$f(2) = 3$, $f(7) = -6$, $f(-5) = 6$, $f(0) = 5$, $f(4) = 0$ olur.

Buradan $\frac{f(2) - f(7) + f(-5)}{f(0) + f(4)} = \frac{3 - (-6) + 6}{5 + 0} = \frac{15}{5} = 3$ olur.



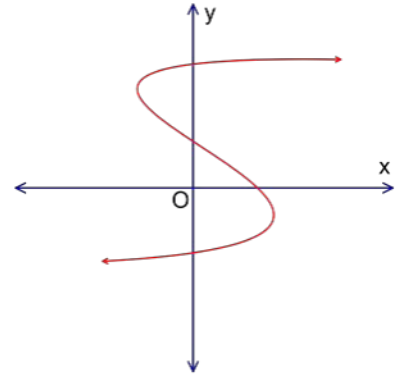
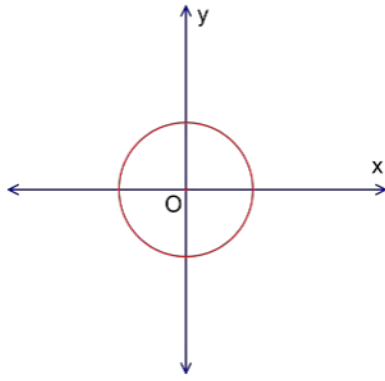
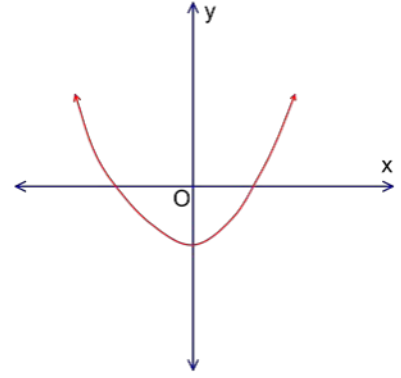
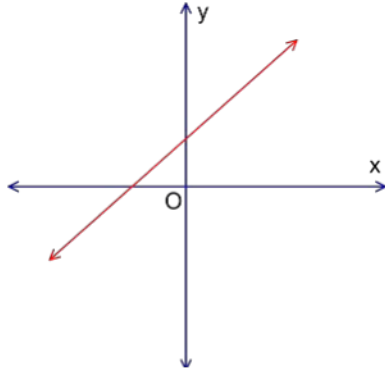
Bilgi

Bir fonksiyon grafiğinde düşey/dikey doğru testi kullanılarak fonksiyonun x ekseninde tanımlı olduğu her bir noktadan y eksenine paralel çizilen doğrular, grafiği yalnızca bir noktada keser. Bu doğrular, grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik bir fonksiyonun grafiği değildir.



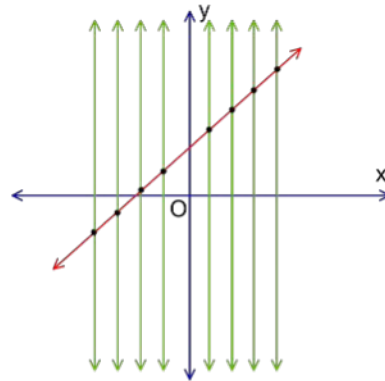
Örnek 80

Aşağıda verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediklerini bulunuz.

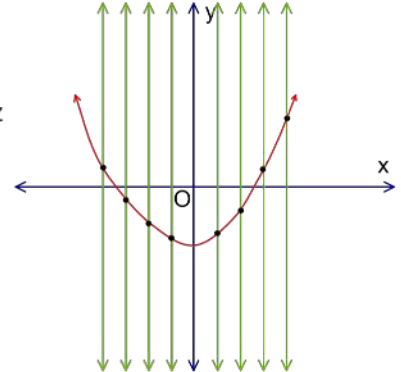


Çözüm

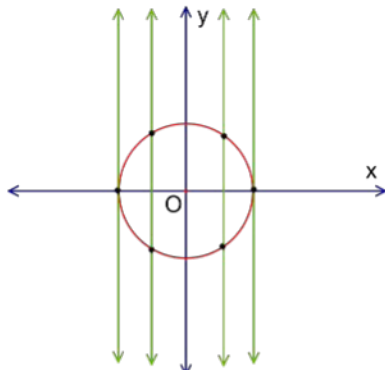
y eksenine paralel çizilen doğrulardan her biri grafiği yalnız bir noktada kestiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiğidir.



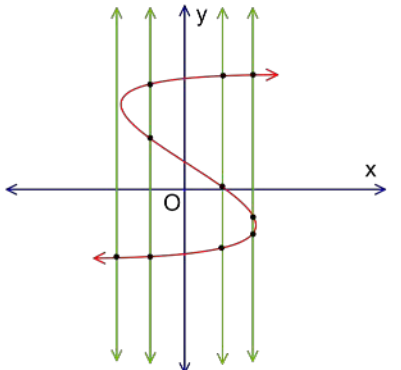
y eksenine paralel çizilen doğrulardan her biri grafiği yalnız bir noktada kestiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiğidir.

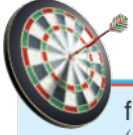


y eksenine paralel çizilen doğrulardan en az bir tanesi grafiği birden fazla noktada kestiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiği **değildir**.



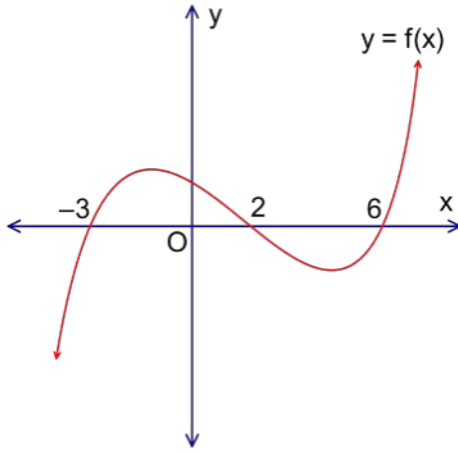
y eksenine paralel çizilen doğrulardan en az bir tanesi grafiği birden fazla noktada kestiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiği **değildir**.



**Bilgi**

$f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarından biri x_1 ise bu fonksiyonun grafiği $(x_1, 0)$ noktasından geçer ve x eksenini $(x_1, 0)$ noktasında keser.

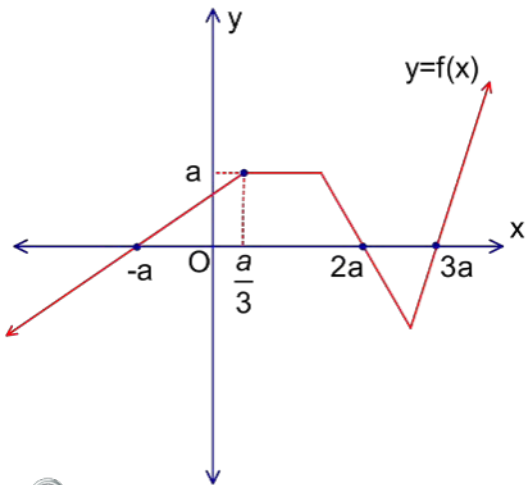
Bir fonksiyonun grafiğinde $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarına **f in sıfırları** denir. Grafik x eksenini kesmiyorsa $f(x) = 0$ denkleminin gerçekte sayılar kümesinde çözümü yoktur.

**Örnek 81**

Yanda grafiği verilen gerçekte sayılar kümesinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerini (f nin sıfırlarını) bulunuz.

**Çözüm**

Koordinat düzleminde grafiğin x eksenini kestiği noktalar $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(6, 0)$ dır. Buradan fonksiyonun sıfırlarının bu noktaların apsisi olan $-3, 2, 6$ olduğu görülür.

**Örnek 82**

Yanda grafiği verilen gerçekte sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonunun sıfırlarının toplamı $3a + 12$ ise a değerini bulunuz.

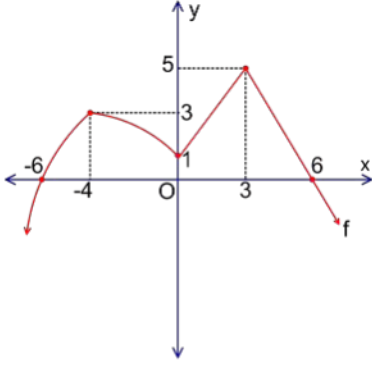
**Çözüm**

Koordinat düzleminde grafiğin x eksenini kestiği noktalar, $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerleridir. Bu değerler toplamı $-a + 2a + 3a = 4a$ olur. $4a = 3a + 12 \Rightarrow a = 12$ olur.



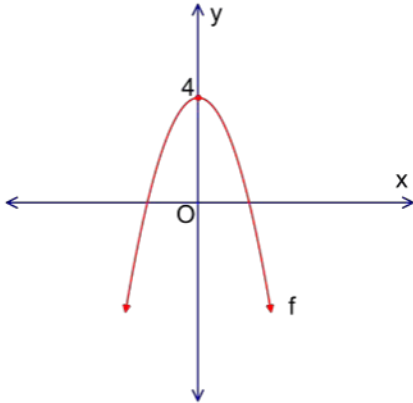
ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıda grafiği verilen, gerçekte sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

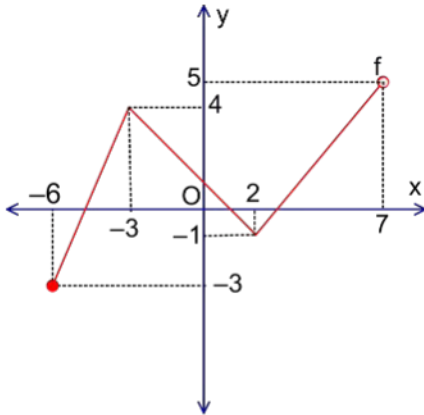


2. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a)

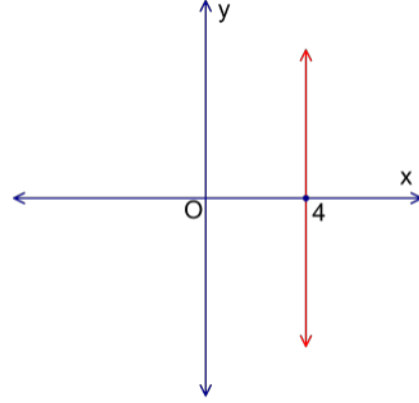


b)

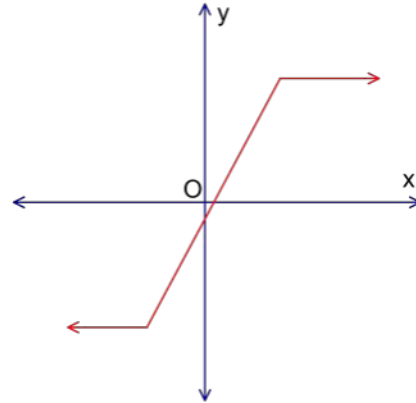


3. Aşağıda verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

a)



b)



c)

